

尤春安 著

巷道金属支架的计算理论



煤炭工业出版社

巷道金属支架的计算理论

尤春安 著

煤炭工业出版社

内 容 提 要

本书在介绍巷道金属支架的类型和一般计算方法的基础上,根据巷道金属支架的结构特点,提出了可缩性金属支架的计算理论和分析方法,考虑支架围岩共同作用原理和支架的弹塑性特征,给出了相应的数值计算和分析方法,并对支架的稳定性进行了理论分析。

本书主要供从事地下工程的科研、设计和生产工程技术人员以及高等院校师生阅读和参考。

图书在版编目(CIP)数据

巷道金属支架的计算理论/尤春安著. - 北京:煤炭工业出版社, 2000

ISBN 7-5020-1570-1

I. 巷… II. 尤… III. 巷道支护-金属支架-算法理论
IV. TD353

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 52109 号

巷道金属支架的计算理论

尤 春 安 著

责任编辑:孙金铎 田克运

*

煤炭工业出版社 出版发行

(北京朝阳区霞光里 8 号 100016)

煤炭工业出版社印刷厂 印刷

*

开本 $850 \times 1168 \text{mm}^1/32$ 印张 5 插页 1

字数 150 千字 印数 1 - 1,000

2000 年 10 月第 1 版 2000 年 10 月第 1 次印刷

社内编号 4339 定价 15.00 元

版权所有 违者必究

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,本社负责调换

目 录

| | |
|----------------------------------|------------|
| 第一章 巷道金属支架概述 | 1 |
| 第一节 巷道金属支架的应用 | 1 |
| 第二节 金属支架钢材 | 2 |
| 第三节 巷道金属支架的结构形式 | 9 |
| 第二章 巷道金属支架计算方法 | 19 |
| 第一节 巷道金属支架计算原理 | 19 |
| 第二节 弹性地基梁理论 | 30 |
| 第三节 梯形金属支架的计算 | 45 |
| 第四节 拱形金属支架的计算 | 47 |
| 第三章 U型钢可缩性支架的计算原理 | 55 |
| 第一节 概述 | 55 |
| 第二节 U型钢可缩性支架计算简图 | 56 |
| 第三节 搭接部分的等效截面参数 | 57 |
| 第四节 卡缆预紧力所产生的支架内力计算 | 61 |
| 第五节 U型钢可缩性支架缩动时产生的支架内力 | 64 |
| 第六节 算例 | 69 |
| 第四章 U型钢可缩性支架的缩动分析 | 78 |
| 第一节 概述 | 78 |
| 第二节 U型钢可缩性支架搭接部分的传力特点 | 82 |
| 第三节 U型钢可缩性支架的缩动条件 | 89 |
| 第四节 U型钢可缩性支架的缩动分析 | 94 |
| 第五章 巷道金属支架计算的矩阵分析方法 | 102 |
| 第一节 结构矩阵分析方法 | 102 |
| 第二节 考虑弹性抗力的圆弧梁单元 | 116 |
| 第三节 巷道金属支架的弹塑性分析 | 121 |
| 第六章 巷道金属支架稳定性分析 | 138 |
| 第一节 概述 | 138 |

| | |
|----------------------|-----|
| 第二节 刚性金属支架的稳定性 | 139 |
| 第三节 可缩性支架的稳定性 | 147 |
| 参考文献 | 155 |

第一章 巷道金属支架概述

第一节 巷道金属支架的应用

随着煤炭工业的发展，煤炭开采深度不断加大，加上机械化生产水平的不断提高和矿井高产高效的要求，巷道支护条件越来越复杂，对巷道的支护效果提出了更高的要求：

巷道地压不断加大，维护条件越来越复杂；

为适应机械化生产要求，巷道断面不断加大；

巷道施工速度不断提高，施工机械化水平越来越高；

对巷道的变形要求更加严格；

对巷道支护可靠性要求更高，如果对巷道进行修复，将对生产产生更大的影响。

因此，金属支架作为一种有效的支护方式，受到越来越广泛地应用。

在国外，金属支架应用很广泛，发展很快，尤其是联邦德国海因茨曼公司生产的 TH 型钢支架自 30 年代问世后，对世界各国的井下支护的发展起到了积极的推动作用。继联邦德国之后，前苏联、波兰、英国、美国、比利时也发展了各自的型钢支架，以适应各种不同维护条件的巷道支护要求。

我国对巷道金属支架的研究、应用起步较晚，与发达国家相比仍有一定的差距，在金属支架的设计、研制和应用等方面，主要是参照国外的经验，自 60 年代 U 型钢支架首先应用以来，金属支架在我国的应用和发展也取得不少可喜成绩：专门作为支架的型钢由原来的 18 号 U 型钢和 9 号矿用工字钢，发展到现在有 18 号、25 号、29 号及 36 号 U 型钢和 9 号、11 号、12 号矿用工

字钢系列产品，1986 年我国设计编制了第一个统配煤矿《巷道金属支架系列》，标志着矿山金属支架支护走向正规化、标准化，是巷道金属支架应用发展的一个重要标志。目前国内也已生产了调质 U 型钢，使支架强度大大提高。

金属支架与其它巷道支护方式相比，有其独特的优越性：

(1) 支护强度大、金属支架如果形状选择合适，其整体具有较高的承载能力，当围岩压力较大时，可与其它支护方式联合应用。

(2) 适应性广，能根据不同的要求和地压条件，设计各种不同的断面形式，在各种不同的围岩条件下都能满足支护要求。

(3) 适应围岩变形，U 型钢可缩性支架具有缩动特征，当围岩的压力达到一定值时，支架就产生缩动，使围岩作用于支架上的压力下降，避免支架遭到破坏而失败。

(4) 安装方便、快捷，有利于机械化施工。

(5) 使用次数多，金属支架的复用次数多，一般大于 3 次，因此虽然一次性投资高，但综合成本低。

(6) 安全可靠，金属支架的破坏形式一般为曲屈变形而失效，不会突然断裂破坏而使巷道围岩突然失稳而冒落，出现突发性的事故。

由于巷道金属支架具有本身独特的优越性，因此在矿山巷道支护中，一直占有非常重要的位置，尤其是 U 型钢可缩性支架，在一些支护困难的巷道中，发挥了重要的作用。

第二节 金属支架钢材

一、矿用工字钢

矿用工字钢简称矿工钢，是专门为矿山巷道支护设计的专用型钢，以适应巷道支架复杂的受力条件的要求，与普通工字钢一样，矿用工字钢以其截面高度的厘米数作为型号名称，目前我国

生产的矿用工字钢有 9 号、11 号和 12 号三种规格，其相应的理论重量为 17.7kg/m、26.1kg/m 和 31.2kg/m。图 1-1 是矿用工字钢和普通工字钢断面几何形状，为了便于比较，表 1-1 给出了矿用工字钢与部分普通工字钢的截面几何参数。

从表 1-1 可以看出，矿用工字钢和普通工字钢的主要区别是高宽比不同。矿用工字钢的高、宽比在 1.18~1.26，而相同截面的普通工字钢高、宽比在 1.75~2.00 之间。矿用工字钢具有翼缘宽、高度小、腹板厚、横纵向的受力性质差异小，抗弯能力高，稳定性好等特点，因此，它更适合于矿山巷道支护要求。

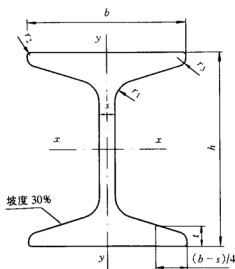


图 1-1 矿用工字钢与普通工字钢断面几何形状

二、U 型钢

U 型钢作为矿山巷道金属支架材料具有以下优越性：

(1) 便于连接，为了便于运输，一般一个巷道金属支架应由多节（三节以上）型钢组成，因此要求型钢与型钢之间搭接方便、简单、快捷，而且有利于提高支架整体结构的承载能力和稳定性。U 型钢满足了这些要求，利用简单的连接件即可完成搭接。

(2) 较好的缩动性能，由于 U 型钢的搭接是靠摩擦力实现的，当搭接部分的受力达到某一条件时，两节 U 型钢便产生滑动，即所谓的缩动，支架搭接部分产生缩动的结果使支架受围岩

表 1-1 矿用工字钢和普通工字钢截面几何参数

| 型号 | 几何参数 (mm) | | | | | 截面面积 (cm^2) | 理论重量 (kg/m) | 截面参数 | | | |
|-------|-----------|-----|-------|------|-------|---------------------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| | h | b | d_s | i | r_1 | r_2 | r_3 | I_x (cm^4) | W_x (cm^3) | I_x (cm^3) | W_x (cm^3) |
| 矿用工字钢 | 9 | 76 | 8 | 10.9 | 12 | 4 | 1.5 | 22.5 | 17.7 | 281 | 62.5 |
| | 11 | 90 | 9 | 14.1 | 12 | 5 | 1.5 | 33.2 | 26.1 | 623.7 | 113.4 |
| | 12 | 95 | 11 | 15.3 | 15 | 5 | 1.5 | 39.7 | 31.2 | 867.1 | 144.5 |
| 普通工字钢 | 10 | 68 | 4.5 | 7.6 | 6.5 | 3.3 | | 14.3 | 11.2 | 245 | 499 |
| | 12.6 | 74 | 5 | 8.4 | 7 | 3.5 | | 18.1 | 14.2 | 488 | 77.5 |
| | 14 | 80 | 5.5 | 9.1 | 7.5 | 3.8 | | 21.5 | 16.9 | 712 | 102 |
| | 16 | 88 | 6 | 9.9 | 8 | 4 | | 26.1 | 20.5 | 1130 | 141 |
| | 18 | 94 | 6.5 | 10.7 | 8.5 | 4.3 | | 30.6 | 24.1 | 1660 | 185 |

表 1-2 U 型钢力学参数表

| 型号 | 截面面积 f^2 (cm^2) | 理论重量 G (kg/m) | $X-X$ | | $Y-Y$ | | 型钢截面参数 | | | |
|-----|------------------------------------|----------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | | | I_x (cm^4) | W_x (cm^2) | I_x (cm^4) | W_x (cm^2) | $\frac{W_x}{W_y}$ | $\frac{W_x}{G}$ | $\frac{W_y}{G}$ | $\frac{W_y}{G}$ |
| 18U | 24.15 | 18.96 | 288.8 | 57.6 | 333.2 | 54.8 | 1.05 | 3.64 | 2.69 | 3.08 |
| 25U | 31.52 | 24.74 | 455.1 | 82.1 | 506.0 | 75.7 | 1.08 | 3.32 | 3.08 | 3.53 |
| 29U | 36.92 | 28.98 | 612.1 | 92.3 | 770.7 | 102.3 | 0.90 | 3.18 | 3.53 | 4.05 |
| 36U | 49.56 | 35.76 | 955.5 | 132.1 | 1277.0 | 145.0 | 0.91 | 3.60 | 4.05 | |

的压力下降，避免支架受力太大，超过支架本身的承载能力而失稳破坏，丧失支架整体承载能力。

(3) 具有较高的截面利用系数，型钢抗弯截面利用系数一般用 $\frac{W_x}{G}$ 和 $\frac{W_y}{G}$ 表示，以此来描述单位截面的抗弯能力，U 型钢在这一点上具有优越的截面利用系数，而且横向、纵向截面参数比较接近，整体抗弯、抗阻能力强，稳定性能好。

(4) 便于加工整形，由于巷道金属支架应多次复用，复用之前，对型钢变形较大的应进行修整，因此整形方便的型钢可以大大地降低支架成本。

U 型钢型号表示每米钢材的理论重量，目前国内生产有 U18、U25、U29 和 U36 四种，图 1-2、图 1-3、图 1-4 和图 1-5 是这四种 U 型钢的断面图，其截面基本力学参数见表 1-2。

三、巷道金属支架钢材的化学成分和力学指标

巷道金属支架能使用的钢材，除要求材料来源广泛、成本低廉外，还应满足下列基本要求：

(1) 强度高，钢材强度高可以减小支架的重量，节约钢材，减缓矿井的运输压力，降低成本。标志着钢材强度的指标是钢材屈服强度 σ_s 和极限强度 σ_b ，单位均为 MPa。

(2) 塑性好，这是因为巷道金属支架必需经过压弯加工、修复整形，而且一般支架在服务期间，都要经历较大的变形，要求支架在加工、修复和使用过程中有较好的塑性，而不致于开裂破坏。重要的是支架具有良好的塑性性能，能在局部进入塑性状态后，自动调整围岩的压力大小与分布，从而提高支架的整体承载能力。标志钢材的塑性指标是延伸率（%），一般要求巷道金属支架的钢材延伸率不低于 16%。

(3) 韧性好，钢材的韧性好，就能使构件有效地抵抗动力荷载和冲击荷载作用。巷道压力一般具有跳跃性，尤其是受采动影响的巷道，围岩的来压往往具有一定的冲击力，因此要求支架的

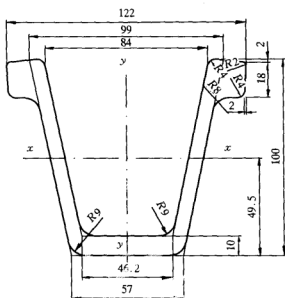


图 1-2 U18 型钢断面图

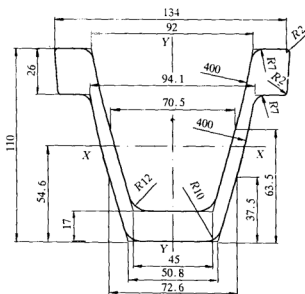


图 1-3 U25 型钢断面图

表 1-3 我国巷道支架钢材化学成分及力学性能表

| 钢 号 | 化 学 成 份 (%) | | | | 机械性能 (不低于) | |
|-------|---------------|-------------|-------------|-------|------------|--|
| | C | Mn | Si | P | S | 强度极限 σ_b (N/mm ²) |
| | | | | | | |
| 16Mn | 0.12 ~ 0.20 | 0.20 ~ 1.60 | 0.20 ~ 0.60 | 0.05 | 不大于 | 350 |
| 20MnK | 0.15 ~ 0.28 | 1.20 ~ 1.60 | 0.20 ~ 0.60 | 0.05 | 0.05 | 320 |
| A5 | 0.28 ~ 0.37 | 0.50 ~ 0.80 | 0.17 ~ 0.35 | 0.055 | 0.05 | 500 ~ 530 |
| A6 | 0.38 ~ 0.49 | 0.50 ~ 0.80 | 0.17 ~ 0.35 | 0.055 | 0.05 | 600 ~ 630 |

表 1-4 其他支护钢材的化学成分及机械性能

| 钢号 | 化 学 成 分 (%) | | | | 机 械 性 能 | | | |
|----------------|---------------|-------------|-------------|-------|---------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------|
| | C | Mn | Si | P | S | σ_s (kg/mm ²) | σ_b (kg/mm ²) | σ_s (%) |
| | | | | | | | | |
| A ₂ | 0.14 ~ 0.22 | 0.40 ~ 0.65 | 0.12 ~ 0.30 | 0.055 | 0.045 | 24 | 39 | 27 |
| 20Mn | 0.17 ~ 0.24 | 0.70 ~ 1.00 | 0.17 ~ 0.37 | 0.040 | 0.040 | 28 | 46 | 24 |
| 27SiMn | 0.24 ~ 0.32 | 1.10 ~ 1.40 | 1.10 ~ 1.40 | | | 85 | 100 | 12 |
| 40Cr | 0.37 ~ 0.45 | 0.50 ~ 0.80 | 0.17 ~ 0.37 | | | 80 | 100 | 9 |
| 45 | 0.42 ~ 0.50 | 0.50 ~ 0.80 | 0.17 ~ 0.37 | 0.040 | 0.040 | 36 | 61 | 16 |

支架拉杆用
支架用
卡缆用
螺栓用
支架用

钢材应有一定的抗冲击能力。钢材的韧性指标是冲击韧性值，它表示冲断一个有凹槽试件单位面积所需要的功，单位是 $\text{MPa}\cdot\text{m}$ 。

巷道金属支架钢材一般采用普通碳素钢和普通低合金钢，矿用工字钢多用 A5 和 A6 普通碳素钢，而 U 型钢则多用 16Mn、20MnK 和 25MnK 等，矿用工字钢和 U 型钢的常用钢材的化学成分和机械性能见表 1-3 所示。

另外，金属支架的钢材除了矿用工字钢和 U 型钢外，还有制造卡缆，螺栓拉杆等配件的其他支护钢材，常见的化学成分及机械性能如表 1-4 所示。

进入 90 年代后我国也出现了调质 U 型钢，对 U 型钢进行热处理，大大地提高了钢材的强度，调质后的 U 型钢，其强度可以提高 50% 左右，抗弯能力能提高 40% ~ 50%。而且延伸率仍然保持在 16% 以上，屈服极限和强度极限比小于 0.75，能满足技术要求，支架承载能力提高 30% 以上，相当于 U25 可以代 U29，U29 代 U36 使用。随着热处理技术的发展，热处理的成本也不断降低，目前热处理成本仅为钢材成本的 5% 左右。

第三节 巷道金属支架的结构形式

巷道金属支架的结构形式有多种多样，按所用的型钢分，有矿用工字钢支架和 U 型钢支架两大类；按支架构件的连接形式分可分为刚性连接式支架和摩擦连接式支架；按支架的连续性分有封闭性支架和非封闭性支架；按巷道的断面形状分有矩形支架、梯形支架、直腿拱形支架、曲腿拱形支架、马蹄形支架、圆形支架等。

刚性连接式支架的连接方式是型钢与型钢之间采用顶接，靠连接夹板及螺栓固定连接。因此在连接部分的构件与构件之间不能产生错动。而摩擦连接式支架的构件与构件间是采用搭接的办法，构件与构件之间是靠摩擦力来传递构件间的轴力的，当轴力达一定程度时，构件间就要产生相对滑动，即缩动，利用缩动这

一特性，当围岩作用于支架上的压力达到一定值时，搭接部分产生缩动，使围岩压力迅速下降，避免支架破坏，从这一意义出发，巷道金属支架习惯地分为刚性金属支架和可缩性金属支架两大类。U型钢由于能实现搭接，因此广泛地应用于可缩性金属支架之中，称为U型钢可缩性支架，而矿用工字钢则难于实现搭接，一般采用顶接形式，因此它是刚性金属支架的主要材料。

一、刚性金属支架

所谓的刚性金属支架是相对于可缩性金属支架而言的，意思是不能产生缩动的支架，而不是不能产生变形的支架，有时候为了使支架有一定的收缩性能，采取了一些其他措施，如在连接处垫木块，在架腿处设压缩装置或减少腿鞋面积，使架腿插入底板等方法，但从支架的特征和力学计算方法看，这些支架仍然归入刚性支架。

在我国矿山，刚性金属支架应用是非常广泛的，在早期它仿造木支架的形式，取代木支架，在巷道支护中起了重要的作用。刚性金属支架的主要特点是结构简单，支架加工、制造都非常容易，而且具有一定的承载能力，适应性广，安装方便、快捷，因此得到广泛的应用。刚性金属支架主要有梯形金属支架、拱形金属支架和梯拱形金属支架等。

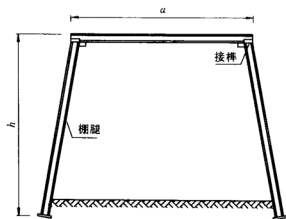
（一）梯形金属支架

1. 梯形金属支架的结构

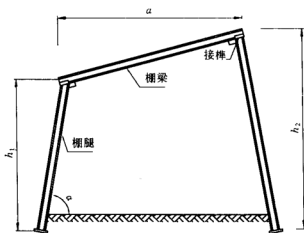
梯形金属支架的标准形式如图1-6(a)所示，主要特征是一梁两柱，为提高支架的稳定性，腿柱向内倾斜 10° ，形成上小下大的梯形断面，在采区顺槽中，巷道沿煤层顶板掘进，常采用斜顶梯形的形式，如图1-6(b)所示。

梯形金属支架的特点是结构简单，加工、架设、运输方便，并具有一定的承载能力，断面利用率高，因此适应于巷道断面不大，围岩压力不大的采准巷道。

2. 梯形金属支架接榫



(a)



(b)

图 1-6 梯形金属支架

(a) 平顶梯形金属支架；(b) 斜顶梯形金属支架

梯形金属支架的棚梁与棚腿的连接俗称接榫。

梯形金属支架的接榫形式很多，大致可分为槽式接榫，斜口接榫卡式接榫，固定接榫和铰接接榫等类型，如图 1-7 所示。

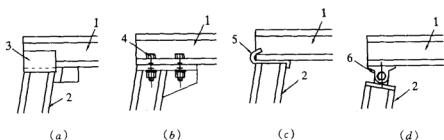


图 1-7 梯形金属支架的接棒形式

(a) 搭槽接棒；(b) 螺栓固定接棒；(c) 卡式接棒；(d) 螺栓铰链接棒
1—棚梁；2—棚腿；3—槽钢；4—螺栓；5—卡座；6—螺栓铰链

(二) 拱形刚性金属支架

拱形刚性金属支架的特征是由若干段矿用工字钢弧形构件组成，矿用工字钢间刚性连接，常见有直腿拱形、曲腿拱形和封闭形等，其结构形式如图 1-8 所示。

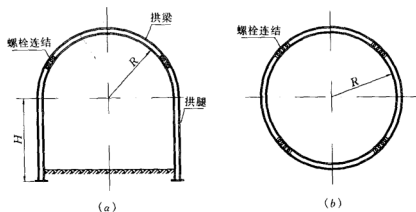


图 1-8 拱形刚性金属支架

(a) 拱形刚性金属支架；(b) 圆形刚性金属支架

拱形金属支架的特点是在均匀围岩压力作用下，支架的内力主要是轴力，而弯矩较小，因此支架具有较高的承载能力，其次由于巷道断面做成拱形的，使得围岩具有较好的稳定性，而且顶

拱形状接近于自然冒落拱形状，从而减少了巷道顶部围岩产生的散体地压。

拱形金属支架的连接主要是采用夹板和螺栓连接，夹板形式有多种，较常见的有扁钢夹板，铸钢夹板和钢板夹板等，如图 1-9 所示，这些连接一般可视为刚性连接，在力学计算时可作为连续的构件考虑。

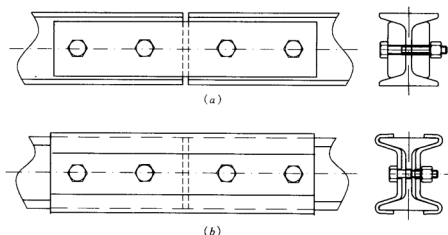


图 1-9 拱形刚性金属支架连接

(a) 铸钢夹板；(b) 钢板夹板

二、U 型钢可缩性支架

(一) U 型钢可缩性支架形式

U 型钢可缩性支架由于搭接的方便，使得其结构形式多种多样，常见的有直腿半圆拱、三心拱、圆形、马蹄形及长环形可缩性支架。

1. 直腿半圆拱可缩性支架

如图 1-10 (a) 所示是直腿半圆拱可缩性支架，这种支架是一种典型的 U 型钢可缩性支架结构形式。根据巷道断面的大小有三节、四节和五节型三种，其特征是拱部各节的曲率半径一

致，三节型可缩性支架当顶压达到一定时，搭接部分产生缩动，顶梁下沉，腿柱内倾，使围岩作用于支架上的压力下降，避免支架遭受破坏，四节型和五节可缩性支架在拱顶有一横向搭接头，不但顶压大能产生缩动，而且当水平压力较大时也能产生缩动。因此整体缩动性能优于三节型可缩性支架。

2. 曲腿拱形可缩性支架

曲腿拱形可缩性支架与直腿拱形支架的区别在于拱腿是做成圆弧形的，这种形状的水平压力承载能力要高于直腿半圆拱可缩性支架。图 1-10 (c) 是曲腿半圆拱 U 型钢可缩性支架的结构。

3. 三心拱可缩性支架

三心拱可缩性支架如图 1-10 (b) 所示，其特征是由两种或两种以上曲率半径的 U 型搭接构成，形式上有直腿三心拱和曲腿三心拱，同样，根据巷道断面的大小也有三节型、四节型和五节型三种，支架的性能与半圆拱形没有多大的区别，在过去分析 U 型可缩性支架的缩动原理时认为：支架在围岩压力作用下，构件产生变形，顶部圆弧 R_1 逐渐变大，腿部圆弧 R_2 逐渐减小，当 R_1 和 R_2 趋于一致时，该处的摩擦阻力变小，同时，作用在支架上的力克服了搭接部分的锁紧力，使拱梁和腿柱产生滑动。实际上这种认识是一种误解，在后面的分析中可以看出，支架的缩动性能是由搭接部分两端的内力及卡缆预紧力确定的，与 R_1 和 R_2 两者的比值无关，实践证明，直腿半圆拱支架的缩动性能与三心拱支架的缩动性能没有多大的区别。

4. 圆形可缩性支架

当巷道压力较大，水平压力和垂直压力都很大时，采用拱形金属支架往往在两帮和底板支护失效，因此，经常采用全封闭的圆形可缩性支架，根据巷道断面大小，有四节、五节和六节几种型式如图 1-10 (e) 所示。

5. 马蹄形可缩性支架

马蹄形可缩性支架实际上就是曲腿拱形可缩性支架加底梁的

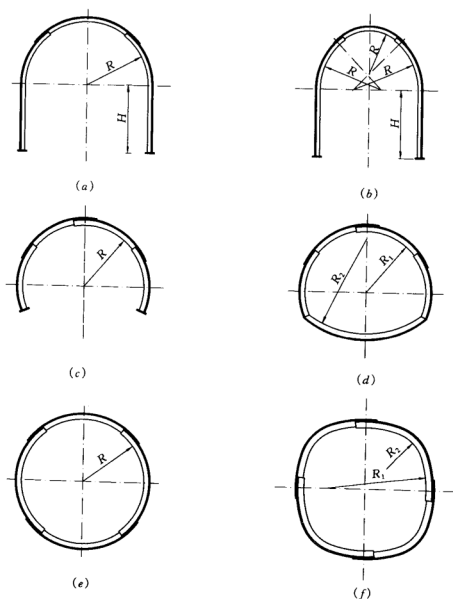


图 1-10 几种 U 型钢可缩性支架

(a) 直腿半圆拱; (b) 三心拱; (c) 曲腿半圆拱;

(d) 马蹄形; (e) 圆形; (f) 环形

结构, 其形式如图 1-10 (d) 所示, 马蹄形可缩性支架由于加了底梁, 提高了曲腿的稳定性, 而且对巷道的底板有一定的控制

作用，巷道断面的利用率和成本优于圆形可缩性支架。

6. 环形可缩性支架

环形可缩性支架是由四节形状和曲率完全相同的、可以互换的构件组成的封闭性支架，有方环形和长环形两种，如图 1-10 (f) 所示，环形可缩性支架的特点是断面利用率高、水平和垂直方向都有较好的缩动性能，且承载能力大，适应于巷道断面不大的情况。

(二) U 型钢可缩性支架的连接件

U 型钢可缩性支架的连接件是支架的关键部分，连接件的结构直接关系到可缩性支架的整体稳定性、缩动性能和支架的承载能力。因此，国内外对连接件都进行了广泛的研究，出现了多种多样形式的连接件，这些连接件大致可分为螺栓连接件和楔式连接件两大类。

1. 螺栓连接件

这类连接件采用螺栓为锁紧机构，特点是可以调整螺栓卡缆预紧力的大小，控制支架的缩动性能。

(1) 螺杆夹板式连接件。这是最早采用的连接件，由一 U 型螺杆和夹板组成，这种连接件的特点是结构简单，缺点是强度低，连接刚度小，容易产生变形，适应于轻型 U 型钢支架。一般情况下，U18 型钢采用的是平板型夹板，如图 1-11 (a) 所示，而 U25 则采用槽型夹板，如图 1-11 (b) 所示。

(2) 双槽夹板式连接件，如图 1-11 (d) 所示，由两块槽形夹板和一对螺栓组成，与螺杆平板式连接件相比，具有强度高、刚度大、缩动平稳，有效缩动量大等特点。这种连接件适合于重型 U 型钢可缩性支架，如 U29 和 U36 型钢可缩性支架等。

(3) 顶紧式连接件，这种连接件结构如图 1-11 (c) 所示，由环箍、方铁和压紧螺栓组成。

2. 楔式连接件

(1) 楔形连接件。楔形连接件也是 U 型钢可缩性支架发展早期广泛使用的一种连接件，结构如图 1-12 (a)、(b) 所示，

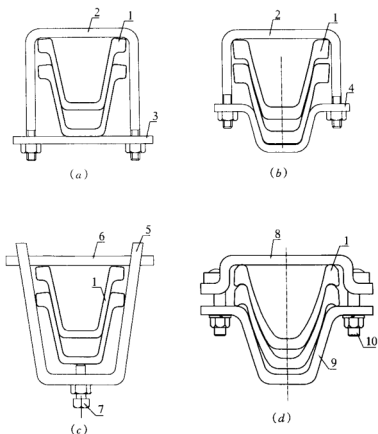


图 1-11 螺栓连接件

1—U 型钢；2—U 型螺栓；3—平板夹板；4—槽形夹板；5—U 型钢箍；

6—方铁；7—螺栓；8—上槽形板；9—下槽形板；10—螺栓

(a) 螺栓平夹板连接件；(b) 螺栓槽形夹板；

(c) 顶紧式连接件；(d) 双槽夹板连接件

这种连接件是由 U 形箍和楔板组成。使用时用锤子楔紧楔块即可。这类连接件的结构较为简单，使用方便但强度低、刚度小、滑动不够平稳，适用于轻型 U 型钢连接件。

(2) 耳楔式连接件。耳楔式连接件结构如图 1-12 (c) 所示。其作用原理是将 U 型钢耳部楔紧，其结构简单，安装拆卸方便、强度高、刚度大、不易损坏。

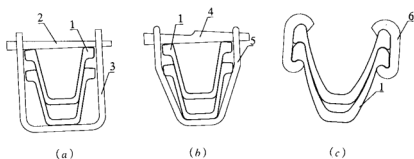


图 1-12 楔式连接件

(a) 单楔式；(b) 双楔式；(c) 耳楔式

1—U 型钢；2—楔块；3—钢板 U 形卡；

4—双楔块；5—钢筋 U 形卡；6—耳楔

第二章 巷道金属支架计算方法

第一节 巷道金属支架计算原理

一、巷道支架的荷载问题

巷道金属支架是在开挖完成后架设的，因此支架所受荷载是围岩变形或破坏过程中产生的。地下结构所受的荷载不同于地面一般结构物所受的荷载，地面结构物所受的荷载一般是确定的，而地下结构所受的荷载要比地面一般结构物所受的荷载复杂的多，它不但与围岩力学、物理性质、围岩原始地应力状态、支架本身的力学特性有关，而且与巷道的施工方法，支架的架设时间、架设方法和架设质量有关，要精确地确定有一定的困难。长期以来，对地下结构所受的荷载，人们通过大量地观察和工程实践，在理论上作出某些简化假定后，推导出便于应用的简单的荷载计算公式。这些近于经验的计算公式，在岩土工程发展过程中起了至关重要的作用。例如，普氏理论和泰沙基理论是根据松散体假设推导出来的地下结构荷载计算公式。它的特点是计算公式非常简单，便于应用。然而，人们通过使用这两种理论进行大量地下工程设计和施工以后，发现它存在着不少缺点，其中最主要的是这些方法考虑因素较少，不能全面地反映地下工程荷载的影响因素。近几十年来，人们通过现场大量的试验和统计寻找并确定影响荷载的各种重要因素，并进行比较科学的分类，然后根据分类情况给出相应的荷载计算公式，这就是围岩分类方法。用围岩分类方法确定支护所受的压力，由于能比较全面地反映围岩及支护情况，因此得到广泛应用。许多行业都根据自己的具体情

况，制定出本行业的围岩分类方法。应当指出，至今为止，上述散体地压理论和围岩分类方法两类计算方法在地下工程结构的设计中起到了重要作用。

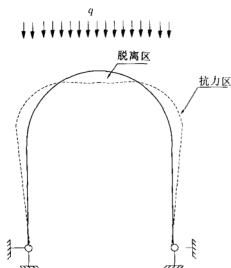


图 2-1 金属支架在垂直荷载作用下产生的变形

金属支架在荷载作用下产生变形，如图 2-1 所示。由于正常情况下支架与围岩密贴，围岩约束支架的变形产生了对支架的反作用力，这一反作用力的大小与围岩和支架变形的大小有关，我们将这种反作用力称为弹性抗力。由于弹性抗力是由支架本身变形产生的，因而这类荷载是一种被动荷载，这是地下结构受力的一个重要特征。

下面简单介绍几种地下结构计算中常用的地压理

论。

1. 散体地压理论

(1) 普氏地压理论：

普氏地压理论假设岩体为松散体。巷道开挖后，支架所受的荷载为由于冒落所形成的冒落拱以内松散体的重量。普氏证明了，松散体冒落拱为二次抛物线，冒落拱高度可由下式确定：

$$h_1 = \frac{a}{f} \quad (2-1)$$

式中 a ——冒落拱的底宽。

当两帮岩体稳定时为巷道宽度的一半，当两帮岩体不稳定时，冒落拱底宽度加大，如图 2-2，这时冒落拱底宽由下式确定：

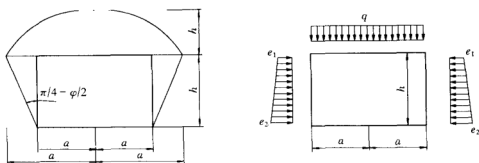


图 2-2 普氏地压的计算

$$a_1 = a + h \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (2-2)$$

式中 f ——岩石坚固性系数, $f = \frac{S_c}{10}$;
 S_c ——岩石单向抗压强度 (MPa);
 a ——巷道宽度的一半 (m);
 φ ——岩石内摩擦角 ($^\circ$);
 h ——巷道高度 (m)。

这时顶压可按下式计算

$$q = \gamma h_1$$

式中 γ ——岩体容重 (kN/m_3);
 q ——顶压分布荷载 (kN/m_3)。

作用于支架上的水平压力为

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \gamma h_1 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \\ e_2 &= \gamma (h_1 + h) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

式中 e_1 、 e_2 ——巷道上、下围岩的水平压力。

(2) 泰沙基 (K. Terzaghi) 理论:

该理论也将岩体视为松散体, 但考虑的方法与普氏理论不同, 它从应力传递概念出发 (如图 2-3), 考虑了巷道尺寸埋

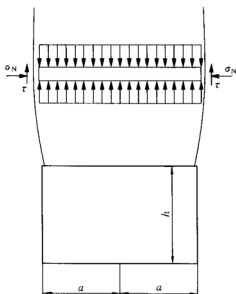


图 2-3 泰沙基地压计算

深、埋深、岩石的粘结力、内摩擦角对岩体稳定性的影响。根据层状微分单元体的平衡条件，导出作用于地下结构的垂直压力公式。当巷道埋深较大时，可简化为：

$$\sigma_B = \frac{a_1 \gamma}{K \tan \varphi} \quad (2-4)$$

式中 σ_B ——支架所受的垂直压力；

a_1 ——巷道顶部塌落宽度的一半；

γ ——岩石容重；

K ——侧压系数，即水平压力与垂直压力之比。

从式 (2-4) 可以看出，当埋深较大时泰沙基公式与普氏地压公式有完全相同的形式。

2. 利用围岩分类法确定支护压力

围岩作用于支架上的压力大小受到多方面因素的影响，如岩石强度、岩体结构、地下水情况、巷道宽度、岩体原始地应力等等，而上面介绍的两种散体地压理论没有全面反映这些因素的影响，因此其结果与实际情况有一定的差异。围岩分类法确定支架压力是综合考虑这些因素，根据稳定状态将围岩分为若干类见表 2-1，然后根据不同类别的围岩提出相应的经验公式。利用围岩分类法确定支护压力是设计部门广泛采用的方法。国内外已有的围岩分类法不下几十种，而大多数围岩分类都给出相应的围岩压力经验公式。

下面以铁路隧道围岩分类法介绍利用围岩分类法确定支护压力的方法。我国《铁路工程技术规范》的围岩分为六类，它以一

百余座铁路隧道的四百多个坍方调查资料为依据, 由统计回归分析直接提出了围岩压力的计算式。

(1) 围岩垂直均布压力:

表 2-1 铁路隧路围岩分类表

| 类别 | 围岩主要工程地质条件 | | 围岩开挖后的稳定状态 (单线) | 单线隧道衬砌类型及主要构造尺寸 | 支撑类型及间距 (单线) |
|----|---|--|--------------------------------------|--|-----------------|
| | 主要工程地质特征 | 结构完整状态 | | | |
| VI | 硬岩 ($R_b > 60\text{MPa}$): 受地质构造影响轻微, 节理不发育, 无软弱面 (或夹层); 层状岩导厚层, 层间结合良好 | 被切割呈巨块状整体结构 | 围岩稳定, 无坍塌, 可能产生岩爆 | (1) 不衬砌, 不防护 (2) 喷水 泥砂浆防护 (3) 喷混凝土衬砌 | 一般不需支撑 |
| V | 硬岩 ($R_b > 30\text{MPa}$): 受地质构造影响较, 节理较发育, 有软弱面 (或夹层) 和贯通微张节理, 但其产状和组合关系尚不致产生滑动; 层状岩导为中层或厚层, 层间结合一般, 很少有分离现象; 或为硬岩偶夹软岩 软岩 ($R_b \approx 30\text{MPa}$): 受地质构造轻微, 节理不发育层状岩层为厚层, 层间结合良好 | 被切割呈大块状砌体结构 被切割呈巨块状整体结构 | 长时间会出现局部小坍塌, 侧壁稳定, 层间结合差的平缓岩层: 顶板易坍落 | (1) 喷混凝土衬砌或锚杆喷混凝土衬砌, 必要时增设金属网 (2) 拱顶 20 ~ 30cm 的半衬砌, 直墙式衬砌或柱式、连拱式等花连墙衬砌 | 部分支撑或锚杆支护 |

续表

| 类别 | 围岩主要工程地质条件 | | 围岩开挖后的稳定状态 (单线) | 单线隧道衬砌类型及主要构造尺寸 | 支撑类型及间距 (单线) |
|-----|--|---|--------------------------------|---|---|
| | 主要工程地质特征 | 结构完整状态 | | | |
| IV | 硬岩 ($R_b > 30\text{MPa}$): 受地质构造影响严重, 节理发育, 有层状软弱面 (或夹层), 但其产状和组合关系尚不致产生滑动; 层状岩层为薄层或中层, 层间结合差, 多有分离现象, 或为硬岩软岩互层 | 被切割呈块 (石) 碎石状镶嵌结构 | 拱部无支撑时可产生小坍塌, 侧壁基本稳定, 爆破震动过大易坍 | (1) 拱顶厚 30 ~ 40cm 直墙式衬砌或柱式, 连拱式等花边墙衬砌 (2) 拱顶厚 30 ~ 40cm 的大拱脚薄边墙 20 ~ 25cm 衬砌 (3) 锚杆喷混凝土衬砌或锚杆金属网喷混凝土衬砌 | 需支撑, 支撑间距 1.0 ~ 1.2m, 距开挖面不支撑的距离不大于 5 ~ 10m |
| III | 硬岩 ($R_b > 30\text{MPa}$): 受地质构造影响很严重, 节理很发育; 层状软弱面 (或夹层) 已基本被破坏 软岩 ($R_b = 5 \sim 30\text{MPa}$): 受地质构造影响严重, 节理发育 (1) 略具压密或成岩作用的粘性土及砂性土; (2) 老黄土; (3) 一般配质胶结的碎, 卵石土 (4) 大块石土 | 被切割呈碎石状压碎结构 被切割呈块 (石) 碎 (石) 状镶嵌结构 (1) (2) 呈大块状压密结构 (3) 巨块状整体结构 (4) 呈堆石状松散结构 | 拱部无支撑时可产生较大的坍塌, 侧壁有时失去稳定 | 拱顶厚 40 ~ 50cm 的直墙式或曲墙式衬砌 (用先拱后墙法施工时, 拱脚可适当加厚, 以防止下沉), 必要时设仰拱 | 需支撑, 支撑间距 0.8 ~ 1.0m, 支撑需紧跟开挖面 |

续表

| 类别 | 围岩主要工程地质条件 | | 围岩开挖后的 稳定状态 (单线) | 单线隧道衬砌 类型及主要 构造尺寸 | 支撑类型 及间距 (单线) |
|----|--|---|--|--|--|
| | 主要工程地质特征 | 结构完整状态 | | | |
| II | 石质围岩位于 挤压强烈的破碎 带内裂隙杂乱, 呈石夹土或土夹 石状 一般第四系的 可塑粘性土及稍 湿至潮湿的非粘 性土(包括一般 碎、卵、砾石土) 及新黄土 | 围岩呈角(砾) 碎(石)松散结 构 非粘性土呈松 散结构;粘性土 及新黄土呈松散 结构 | 围岩易坍塌, 处理不当会出现 大坍塌,侧壁常 出现小坍塌,浅 埋时易出现地表 下沉(陷)或坍 至地表 | 拱顶厚 50~60cm的 曲墙带仰拱 混凝土衬砌 | 需加强支 撑,支撑间 距 0.6 ~ 0.8m,并用 背板支护, 必要时随挖 随支 |
| I | 石质围岩位于 挤压极强烈的破 碎带内,呈角砾, 砂,泥松软体 软塑状粘性土 及潮湿的粉细砂 等 | 围岩呈泥砂角 砾状松软结构 粘性土呈易蠕 动的松软结构; 砂性土呈潮湿 的松散结构; | 围岩极易 坍塌变形, 有土壤常 与水一齐涌 出,浅埋时 易坍至地表 | (1) 拱顶 厚 50~60cm 带仰拱的刚 性骨架混凝 土衬砌或风 筋混凝土曲 墙衬砌 (2) 拱顶 厚 60~70cm 的曲墙仰拱 的混凝土衬 砌 | 密排木支 撑或间距 0.8m的金属 支撑(用作 混凝土衬砌 骨架),必要 时先护后挖 |

$$q = 0.45 \times 2^{6-s} / \gamma \omega, \text{ t/m}^2 \quad (2-5)$$

式中 s ——围岩类别,见表 2-1,例如 IV 类围岩取 $S=4$;

γ ——围岩容重, t/m^3 ;

ω ——跨度影响系数; $\omega = 1 + i(l_m - 5)$ (2-6)

l_m ——毛洞跨度, m;

i ——与跨度有关的系数, $l_m < 5\text{m}$, $i = 0.2$

$l_m = 5 \sim 15\text{m}$, $i = 0.1$ 。

上列公式的适用条件为：

- (a) $H_m/l_m < 1.7$ ，其中 H_m 为毛洞高度 (m)；
- (b) 采用钻爆法施工的深埋隧道；
- (c) 围岩不产生显著偏压力和膨胀压力。

(2) 围岩水平压力：

按照围岩类别采用如下公式计算围岩水平压力 e ：

$$\left. \begin{array}{ll} \text{I 类围岩} & e = \left(\frac{1}{2} \sim 1 \right) q \\ \text{II 类围岩} & e = \left(\frac{1}{3} \sim \frac{1}{2} \right) q \\ \text{III 类围岩} & e = \left(\frac{1}{6} \sim \frac{1}{3} \right) q \\ \text{IV 类围岩} & e = \left(0 \sim \frac{1}{6} \right) q \\ \text{IV} \sim \text{V 类围岩} & e = 0 \end{array} \right\} \quad (2-7)$$

3. 支架荷载的现场量测方法

从上面的分析可以看出，要精确地确定围岩作用于支架上的荷载是相当不容易的，其主要原因是影响因素较多，而这些因素本身有很多是难于确定的，因此，采用理论或经验的分析方法确定的荷载与实际情况都有一定的差异。采用现场荷载的量测方法，可以直接获得支架和围岩之间的相互作用力，包括主动荷载和被动荷载（弹性抗力），为支架的计算与设计提供比较可靠的依据。

根据量测原理不同，量测围岩作用于支架上的压力的方法可分为三类：

(1) 直接法：将压力传感器（如各种压力盒，油压枕等）设置于围岩和支架之间，形成围岩—测试元件—支架的传力系统，直接获取围岩和支架相互作用力的信息。图 2-4 是在某矿利用钢弦式压力盒量测直腿半圆拱 U 型钢可缩性支架的实例。

这种方法优点是读数直观、系统稳定、能比较正确地反映支架的荷载情况，缺点是投资较大，但仍然是量测支架荷载的常用

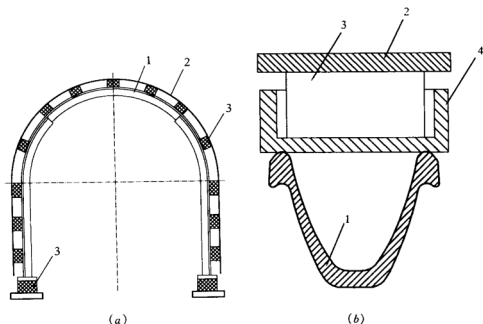


图 2-4 直接法量测支架荷载

(a) 量测断面; (b) 压力盒装置

1—U 型钢支架; 2—传力板; 3—压力盒; 4—固定盒

方法。

(2) 间接法：将应变传感器（如电阻应变片等）附着在支架上，使应变传感器与支架一起变形，从而量测支架的某些部位的应变，并计算出支架的内力，再推算支架的荷载。这种方法的优点是方法简便、投资小；缺点是系统稳定性较差、技术要求高，因此在应用上受到一定的限制。图 2-5 是利用电阻应变片量测支架内力的实例，在应用时可以按应变片的布置在实验室进行标定，以直接测定支架内力。

(3) 位移反分析法：位移量测不同于应力应变量测，它具有反映直观、易于实施、稳定可靠和简便经济等优点，是现场人员易于接受的一种量测方法。通过量测支架的某些点的相对位移，采用反算的方法确定支架的荷载。这一方法将在第五章作为应用

实例加以介绍。

4. 弹性抗力

支架在荷载作用下，要产生变形。图 2-1 所示的直腿拱形金属支架，在垂直荷载（垂直荷载大于水平荷载）作用下，产生的变形如虚线所示。在拱顶，其变形背向地层，在此区域内围岩对结构不产生约束作用，所以称为“脱离区”，而在靠近拱脚和边墙部位，结构产生压向地层的变形，由于结构与围岩紧密接触，则围岩

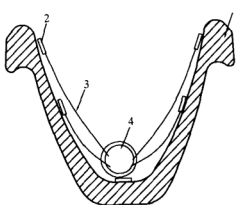


图 2-5 间接法量测方案

1—U 型钢；2—应变片；3—导线；4—电缆

将制约结构的变形，从而产生了对结构的反作用力，对这个反作用力习惯上称弹性抗力。因此地层的弹性抗力，是在主动荷载作用下，支架向围岩方向的变形而引起的被动力。弹性抗力就其作用性质来说是被动的，但对结构来讲，它也是一种荷载。弹性抗力作用的范围称为“抗力区”。

围岩弹性抗力的存在是地下结构区别于地面结构的显著特点之一。因为，地面结构在外力作用下，可以自由变形不受介质约束，而地下结构在外力作用下，其变形要受到地层的约束，所以地下结构设计必须考虑结构与地层之间的相互作用，这就带来了地下结构设计与计算的复杂性，但这只是问题的一个方面。而另一方面，由于地层弹性抗力的存在，限制了支架的变形，以致结构的受力条件得以改善，使其变形减小而承载能力有所增加。

既然弹性抗力是由于结构与地层的相互作用产生的，所以弹性抗力的大小和分布规律不仅决定于结构的变形，还与地层的物理力学性质有着密切的关系。如何确定弹性抗力的大小和其作用范围（抗力区），目前有两种基本理论。一种是局部变形理论，

认为在弹性地基（围岩）某点上施加的外力只会引起该点的沉降；另一种是共同变形理论，认为弹性地基上的一点的外力，不仅引起该点发生沉降，而且还会引起附近一定范围的地基发生沉降。从理论上分析当然后一种理论较为合理，但由于局部变形理论计算较为简单，且一般尚能满足工程精度要求，所以目前地下结构中多采用局部变形理论计算弹性抗力。

在局部变形理论中，以熟知的温克尔（E·Winkler）假设为基础，认为地层的弹性抗力与结构变位成正比，即

$$\sigma = k\delta \quad (2-8)$$

式中 σ ——弹性抗力强度（MPa）；
 k ——围岩弹性抗力系数（MN/m²）；
 δ ——支架朝围岩方向的变位值（m）。

二、考虑支架围岩相互作用的支架计算和设计模型

结合国内外地下结构设计实践，巷道金属支架的计算与设计大致有以下几种计算理论。

1. 经验类比法

经验类比设计法是以往巷道支护设计中最常用的一种设计计算方法。依据不同的围岩条件的矿山压力情况，选择适当的支架形式，并根据经验选取支架的参数，在实践应用中根据巷道的变形情况调整支护参数，使巷道的支架形式、支护断面和支护参数更趋于合理。

2. 局部变形理论

局部变形理论的基础是局部变形地基梁理论。计算原理可根据上述的荷载确定方法确定围岩压力，按弹性地基梁理论计算支架内力，并进行支架参数的设计。局部变形理论是地下工程广泛应用的一种计算和设计方法。

3. 共同变形理论

共同变形理论是将支架、围岩作为一整体，根据支架、围岩间应满足应力的位移连续条件进行分析计算，以分别获得支架和

围岩的内力和位移，以此验算围岩的稳定状态并进行支架的参数设计，这一计算理论只在一些简单的问题获得解析解。对一般巷道情况，应采用数值分析方法，如有限元法边界元、离散元等数值计算方法。近年来，随着计算机的发展，国内外已有很多的可用于地下工程力学计算的分析软件，因此采用这种理论进行支架力学分析已不是难事。

第二节 弹性地基梁理论

一、弹性地基梁的基本概念

在工程结构中，通常在结构底部设置基础梁或基础板，这是由于基础梁、板与地基的接触面积比较大，上部结构的荷载经过地基梁、板分散地传给地基，可以减少地基所受的压力的强度，如果假设基础梁是弹性的，这类基础梁就叫做弹性地基梁。图 2-6 (a) 是房屋结构的梁形基础的计算简图；图 2-6 (b) 水闸底板的计算简图；图 2-6 (c) 是地下结构的衬砌的计算简图。从这些例子可以看出，弹性地基梁不同于普通结构梁，两者间的主要区别在于：

(1) 普通梁只在有限个支座处与基础相连，梁所受的支座反力是有限个未知力，因此普通梁是静定或有限次超静定的结构，而弹性地基梁具有无穷多个支点和无穷多个未知反力；因此弹性地基梁是无限多次超静定结构。由此可以看出，超静定次数是无限还是有限，这是普通梁和弹性地基梁的主要区别。

(2) 普通梁的支座通常看作为刚性支座，即可以略去地基的变形，只考虑梁的变形。弹性地基梁则必需同时考虑梁和地基的变形。实际上，梁和地基是共同变形的，一方面梁给地基以压力使地基沉陷，反过来，地基给予梁相反的压力，限制梁的变形。而梁的位移与地基的沉陷在每一点都必须彼此相等，才能满足变形连续条件。由此看出，地基的变形是略去还是考虑，这是两者

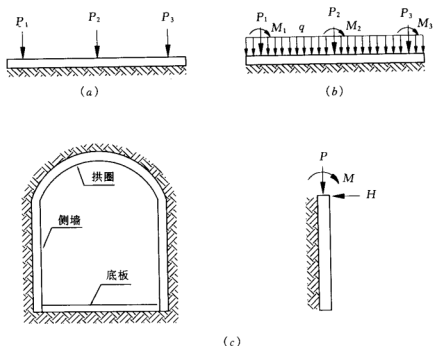


图 2-6 弹性地基梁计算简图

(a) 梁形基础; (b) 水闸室底板; (c) 地下结构侧墙

间的另一个主要区别。

在力学计算中，首先都必须对某些问题提出一些基本假设，基本假设不同，就建立起不同的计算模型。弹性地基梁理论也是这样，对假设不同的地基反力与地基沉陷之间的关系，就建立起多种的计算模型。下面介绍其中的三种假设。

1. 反力直线分布假设

假设梁所受的地基反力是沿整梁按直线分布的，如图 2-7 所示。

为了确定地基反力直线分布的大小，只需求出两个基本未知数 p_1 和 p_2 ， p_1 和 p_2 分别为 A 点和 B 点地基反力大小。而平衡方程有两个， $\Sigma y = 0$ 、 $\Sigma M = 0$ ，因此问题可简化为静定的。在求地基反力时地基梁上所有荷载均可表示为图 2-7 所示 P 和 M ，

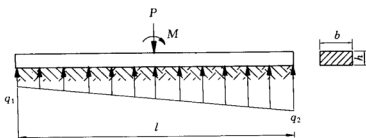


图 2-7 反力直线分布

地基反力分布为

$$p(x) = p_1 + (p_1 - p_2) \frac{x}{l}$$

$$\sum y = 0 \quad \int_0^l \left[p_2 + (p_1 - p_2) \frac{x}{l} \right] dx = P$$

$$\sum M = 0 \quad \int_0^l \left[p_2 + (p_1 - p_2) \frac{x}{l} \right] \left(x - \frac{l}{2} \right) dx = M$$

解得：

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{P}{l} \pm \frac{6M}{l^2} \\ p_2 & \end{aligned} \quad (2-9)$$

从以上讨论可以看出，这种算法非常简便，但是比较粗糙。实际上，当梁的刚度是有限大时，梁的挠度分布是条曲线，因此地基反力分布不可能为直线反布，因此这种假设不能反映地基梁实际情况。但当梁的刚度非常大，并假设任一点的地基反力 p 与该点的地基沉降 y 成正比（Winkler 假设），则这个假设是成立的，例如衬砌的拱脚面和边墙的墙底与围岩的接触力就可按这一假设处理。

2. 局部弹性地基梁模型（Winkler 假设）

假设地基表面任一点的沉降量与该点单位面积上所受的壓力成正比，这一假设称为温克尔（Winkler）假设。这个假设实际上是把地基看作为在刚性底座上的一系列独立的弹簧，如图 2-8 (a) 所示。当地基表面上某一点受压力 P 时，由于弹簧是彼此

独立的，故只在该点局部产生沉陷 y ，而其他地方不产生任何的沉陷，因此，这种地基模型称局部弹性地基模型。

按温克尔假设计算地基梁时，可以考虑梁本身的实际弹性变形，因此消除了反力直线分布假设的缺点，但是温克尔假设本身的缺点是没有地基的变形连续性，当地基表面在某一点承受压力时，实际上不仅在该点局部产生沉陷，而且也在邻近区域产生沉陷（图 2-8b）。由于没有考虑地基的连续性，故温克尔假设不能全面地反映地基梁的实际情况，但在某些条件下，温克尔假设的计算结果还是与实际情况比较接近的。

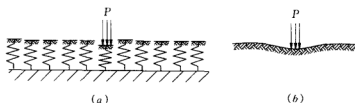


图 2-8 局部弹性地基模型与地基的实际变形

3. 半无限体弹性地基模型

假设地基为均匀、连续、弹性的半无限体，一点的沉陷量不但与该点的压力有关，而且与邻近区域的压力分布有关，这个假设虽然作了均质、连续、弹性等假设，但毕竟比温克尔的假定更进了一步，能更好地反映实际情况。但这个模型上数学上处理比较复杂，因而在实际应用上受到一定的限制。

上述三种假设，各有优缺点，工程上都有应用。反力直线分布假设虽然计算非常简单，但与一般的实际情况差异较大，只有当梁的刚度很大时，才能比较接近实际情况；半无限体弹性地基模型虽然与实际情况比较接近，但必要把围岩作为半无限体参与计算，用解析方法分析有一定的困难，而且作了均质、连续、弹性等假设本身也与实际情况有一定的差异；应用温克尔假设的局部变形理论，虽然从理论上不如半无限弹性地基梁模型严密，但

计算方法比较简便些。由于目前对围岩力学性态还没有全面认识,尤其是对围岩中的小型、微型裂隙处理尚无比较有效的方法,因此在支架计算中,采用局部变形理论计算围岩的抗力作为作用于支架上的抗力,便于计算,这是一种比较有效的实用方法。

二、局部变形地基梁的基本微分方程

前面已给出温克尔假设,该假设可表述为:地基表面任一点的沉降与该点单位面积上所受的力成正比,即

$$\sigma_x = ky_x \quad (2-10)$$

式中 σ_x ——点 x 上的压力强度,量纲是〔力〕/〔长度〕²;

y_x ——地基的沉降量,量纲是〔长度〕;

k ——比例系数,在地下结构中称围岩抗力系数,其物理意义是单位面积地基沉降单位深度所需的力,量纲为〔力〕/〔长度〕³。

式(2-10)两边乘以 b 得

$$p(x) = bky_x \quad (2-11)$$

式中 $p(x)$ ——梁单位长度上的地基反力,量纲为〔力〕/〔长度〕;

b ——梁的宽度。

表2-2给出了各种围岩的弹性抗力系数 k 的参考值。

假设长为 l , 宽为 b 的弹性地基等截面直梁,地基反力与沉降关系满足温克尔假设,梁上作用有任意荷载,其坐标、荷载及内力、变形正向如图2-9所示。

在图2-9中,我们规定梁变形前的左端截面中心为坐标原点, x 轴向右为正, y 轴向下为正。分布荷载 $q(x)$ 及集中荷载 p 向下为正,集中力偶荷载 M 顺时针为正,梁的内力中弯矩 M_x 使得梁上边缘受拉为正,剪力 Q_x 使得微段逆时针转为正。梁的变形中挠度(等于地基的沉降量) y_x 向下为正,角度位中

表 2-2 弹性抗力系数 k 的参考数值

| 地层等级 | 围岩坚固性系数 f | 地层代表名称 | 地基系数 (kN/m^3) |
|------|-------------|--|--|
| 坚硬的 | 8 | 坚硬的石灰岩; 不坚硬的花岗岩; 坚硬的砂岩; 坚硬的大理岩; 白云岩; 黄铁矿 | $1.2 \times 10^3 \sim 2.0 \times 10^3$ |
| | 6 | 普通砂岩; 铁矿 | $0.8 \times 10^3 \sim 1.2 \times 10^3$ |
| | 5 | 砂质片岩; 片状砂岩 | $0.6 \times 10^3 \sim 0.8 \times 10^3$ |
| 中等的 | 4 | 坚硬的粘板岩; 不坚硬的砂岩和石灰岩; 软砾岩 | $0.4 \times 10^3 \sim 0.6 \times 10^3$ |
| | 3 | 不坚硬的片岩, 密实的泥灰岩; 坚硬胶结的粘土 | $0.3 \times 10^3 \sim 0.4 \times 10^3$ |
| | 2 | 软片岩; 软石灰岩, 冻结土; 普通泥灰岩; 破碎砂岩; 胶结的卵石和圆砾; 块石土 | $0.2 \times 10^3 \sim 0.3 \times 10^3$ |
| | 1.5 | 碎石土; 破碎片岩; 散处的卵石和碎石; 硬化粘土; 硬煤 | $0.12 \times 10^3 \sim 0.2 \times 10^3$ |
| | 1 | 坚实粘土; 普通煤; 坚硬的冲积土; 掺石土 | $0.06 \times 10^3 \sim 0.12 \times 10^3$ |
| 松软的 | 0.6 | 泥砂; 粘砂土; 种植土; 泥炭; 轻砂粘土 | $0.03 \times 10^3 \sim 0.06 \times 10^3$ |

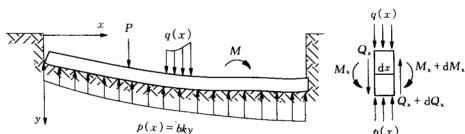


图 2-9 弹性地基梁的荷载、内力和变形

的 Q_x 逆时针转为正, 地基反力 $P(x)$ 向上为正。

为建立挠度曲线微分方程, 在梁上任取一微段 dx 来研究, 该微段的受力如图 2-7b 所示。由平衡条件

$$\left. \begin{aligned} \Sigma Y &= Q_x - (Q_x + dQ_x) + q(x)dx - p(x)dx = 0 \\ M &= M_x - (M_x + dM_x) + Q_x dx + \frac{1}{2}[q(x) - p(x)](dx)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-12)$$

将式 (2-11) 代入式 (2-12), 并略去高阶微量的

$$\frac{dQ_x}{dx} = q(x) - bk y_x \quad (2-13)$$

$$\frac{dM_x}{dx} = Q_x \quad (2-14)$$

由材料力学得知, 梁的弯矩与其挠度间的微分关系为

$$M_x = EI \frac{d^2 y_x}{dx^2} \quad (2-15)$$

将式 (2-15) 和式 (2-14) 代入式 (2-13)

得

$$\frac{d^4 y_x}{dx^4} + \alpha^4 y_x = \frac{4\alpha^4}{bk} q(x) \quad (2-16)$$

式中 α ——弹性地基梁特征值, 量纲 $\frac{1}{[\text{长度}]}$,

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{bk}{4EI}} \quad (2-17)$$

E ——梁材料的弹性模量, 量纲 $[\text{力}] / [\text{长度}]^2$;

I ——梁的截面惯性矩, 量纲 $[\text{长度}]^4$ 。

若地基梁为一等截面梁, 且围岩的弹性抗力系数 k 为常数, 即弹性地基梁特征值 α 为一常数, 则式 (2-16) 的弹性地基梁挠度微分方程为一四阶常系数非齐次线性常微分方程。

三、弹性地基梁挠曲线微分方程的齐次解

一个非齐次常微分方程的一般解是由齐次解和特解两部分组

成，下面首先讨论其齐次解。所谓齐次解，是在式 (2-16) 中，荷载项 $q(x) = 0$ ，即梁跨间无荷载的情况：

$$\frac{d^4 y_x}{dx^4} + 4\alpha^4 y_x = 0 \quad (2-18)$$

其特征方程为

$$r^4 + 4\alpha^4 = 0 \quad (2-19)$$

它有两对其轭复根：

$$\begin{aligned} r_1 &= (1+i)\alpha & r_2 &= (1-i)\alpha \\ r_3 &= (-1+i)\alpha & r_4 &= (-1-i)\alpha \end{aligned}$$

所以得到方程式 (2-18) 的四个线性无关的特解

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_1 &= e^{(1+i)\alpha x} = e^{\alpha x} e^{i\alpha x} \\ \bar{y}_2 &= e^{\alpha x} e^{-i\alpha x} \\ \bar{y}_3 &= e^{-\alpha x} e^{i\alpha x} \\ \bar{y}_4 &= e^{-\alpha x} e^{-i\alpha x} \end{aligned} \right\} \quad (2-20)$$

这四个特解的任意线性组合也是方程式 (3-11) 的特解。

这里，引入欧拉公式

$$\operatorname{sh} \alpha x = \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2}$$

$$\operatorname{ch} \alpha x = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2}$$

$$\sin \alpha x = \frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2}$$

$$\cos \alpha x = \frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{取 } \bar{y}_1 &= \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4 \\ &= e^{\alpha x} e^{i\alpha x} + e^{\alpha x} e^{-i\alpha x} + e^{-\alpha x} e^{i\alpha x} + e^{-\alpha x} e^{-i\alpha x} \\ &= (e^{\alpha x} e^{i\alpha x}) (e^{i\alpha x} e^{-i\alpha x}) \\ &= 4 \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{同理取 } \bar{y}_2 &= \bar{y}_1 - \bar{y}_2 + \bar{y}_3 - \bar{y}_4 \\ &= 4 \operatorname{ch} \alpha x \sin \alpha x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{y}_3 &= \bar{y}_1 + \bar{y}_2 - \bar{y}_3 - \bar{y}_4 \\
&= 4shax \cos ax \\
\bar{y}_4 &= \bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \bar{y}_3 + \bar{y}_4 \\
&= 4shax \sin ax
\end{aligned}$$

令

$$\left. \begin{aligned}
\varphi_1 &= chax \cos ax \\
\varphi_2 &= chax \sin ax + shax \cos ax \\
\varphi_3 &= shax \sin ax \\
\varphi_4 &= chax \sin ax - shax \cos ax
\end{aligned} \right\} \quad (2-21)$$

φ_1 、 φ_2 、 φ_3 和 φ_4 称为克雷洛夫函数，显然它们是方程式 (2-18) 的四个线性无关的特解，其线性组合

$$y(x) = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + C_3 \varphi_3 + C_4 \varphi_4 \quad (2-22)$$

是方程式 (3-11) 的通解。其中 C_1 、 C_2 、 C_3 和 C_4 是由边界条件所确定的常数。对 φ_1 、 φ_2 、 φ_3 和 φ_4 分别逐次求解，得：

$$\begin{array}{llll}
\varphi_i: & \frac{d\varphi_i}{dx} & \frac{d^2\varphi_i}{dx^2} & \frac{d^3\varphi_i}{dx^3} & \frac{d^4\varphi_i}{dx^4} \\
\varphi_1: & -\alpha\varphi_4 & -2\alpha^2\varphi_3 & -2\alpha^3\varphi_2 & -4\alpha^4\varphi_1 \\
\varphi_2: & 2\varphi_1 & -2\alpha^2\varphi_4 & -4\alpha^3\varphi_3 & -4\alpha^4\varphi_2 \\
\varphi_3: & 2\varphi_2 & -2\alpha^2\varphi_1 & -2\alpha^3\varphi_4 & -4\alpha^4\varphi_3 \\
\varphi_4: & 2\varphi_3 & 2\alpha^2\varphi_2 & 4\alpha^3\varphi_1 & -4\alpha^3\varphi_4
\end{array}$$

从上面可以看出，克雷洛夫函数的导数仍然是克雷洛夫函数，这是克雷洛夫函数的一个重要性质。由材料力学的梁挠度、转角、弯矩和剪力之间的关系，即可求得弹性地基梁跨间无荷载情况的梁变位及内力的公式。

$$y_x = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3 + c_4 \varphi_4$$

$$\theta_x = -\frac{dy_x}{dx} = \alpha (c_1 \varphi_4 - 2c_2 \varphi_1 - c_3 \varphi_2 - 2c_4 \varphi_3)$$

$$M_x = EI \frac{d^2 y_x}{dx^2} = \frac{bk}{2\alpha^2} (-c_1 \varphi_3 - c_2 \varphi_4 + c_3 \varphi_1 + c_4 \varphi_2) \quad (2-23)$$

$$Q_x = EI \frac{d^3 y_x}{dx^3} = \frac{bk}{2\alpha} (-c_1 \varphi_2 - 2c_2 \varphi_3 - c_3 \varphi_4 + 2c_4 \varphi_1)$$

因此，只要确定 c_1 、 c_2 、 c_3 和 c_4 ，则梁的挠度、转角、弯矩和剪力方程就完全确定了。在实际应用中，往往已知梁的一端的挠度、转角、弯矩或剪力，因此，为了应用方便，则用梁的始端 ($x=0$ 处) 的挠度 y_0 、转角 θ_0 、弯矩 M_0 和剪力 Q_0 ，作为待确定的积分常数， $x=0$ 、 $\varphi_1=0$ 、 $\varphi_2=\varphi_3=\varphi_4=0$ ，利用式 (3-15) 得：

$$\begin{aligned} c_1 &= y_0 & c_2 &= -\frac{\theta_0}{2\alpha} \\ c_3 &= \frac{2\alpha^2}{bk} M_0 & c_4 &= \frac{\alpha Q_0}{bk} \end{aligned}$$

再代入式 (3-15)，即得到用 y 、 θ 、 M_0 和 Q_0 表示的挠度、转角、弯矩的剪力方程：

$$\left. \begin{aligned} y_x &= y_0 \varphi_1 - Q_0 \frac{1}{2\alpha} \varphi_2 + M_0 \frac{2\alpha^2}{bk} \varphi_3 + Q_0 \frac{\alpha}{bk} \varphi_4 \\ \theta_x &= y_0 \alpha \varphi_4 + \theta_0 \varphi_1 - M_0 \frac{2\alpha^3}{bk} \varphi_2 - Q_0 \frac{2\alpha^2}{bk} \varphi_3 \\ M_x &= -y_0 \frac{bk}{2\alpha^2} \varphi_3 + \theta_0 \frac{bk}{4\alpha^3} \varphi_4 + M_0 \varphi_1 + Q_0 \frac{1}{2\alpha} \varphi_2 \\ Q_x &= -y_0 \frac{bk}{2\alpha} \varphi_2 + \theta_0 \frac{bk}{2\alpha^2} \varphi_3 - M_0 \alpha \varphi_4 + Q_0 \varphi_1 \end{aligned} \right\} \quad (2-24)$$

四、弹性地基梁挠曲线方程的特解

上面讨论的是梁跨间无荷载的情况，现讨论梁跨间作用有荷载，如图 2-10 所示的情况，梁上作用有集中力 P ，集中力偶 M 及分布荷载 $q(x)$ ，这些力的作用点的横坐标分别为 a_p 、 a_m 、 a_q 。

这时梁的挠度曲线微分方程式 (2-16) 的通解，由齐次解及特解叠加而成。齐次解即梁跨间无荷载时的解，特解根据梁跨间荷载的性质及分布范围而定，它反映了荷载的影响，因此，特

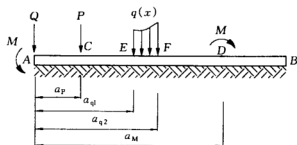


图 2-10 一般荷载的弹性地基梁

解又称荷载影响附加项或荷载项。对于图 2-8 所示一般荷载情形，试图用一个连续函数来表示荷载影响附加项，不但困难而且使用上也不方便。所以，工程上常按荷载性质及分布范围，在保证各段梁变形协调的条件下，分段表示这些附加项。当采用分段表示附加项时，我们可以按照材料力学求普通梁挠度曲线初参数解的方法，得弹性地基梁挠度曲线的初参数方程式；也可以利用公式 (2-24) 写出图 2-10 所示情形的变位及内力计算公式。现以挠度曲线 y_x 为例，说明各段附加项的求法。

图 2-10 中 AC 段，除初参数外，梁段上无其它荷载，挠度曲线方程式应按公式 (2-24) 考虑即

$$y_a = y_0 \varphi_1 - \theta_0 \frac{1}{2a} \varphi_2 + M_0 \frac{2a^3}{bk} \varphi_3 + Q_0 \frac{a}{bk} \varphi_4 \quad (2-25)$$

如 C 点作用集中力 P ，显然，C 点以右的挠度除初参数 y_0 、 θ_0 、 M_0 及 Q_0 的影响，按公式 (2-25) 考虑外，还应加上因 P 的影响产生的附加项 Δy_0 。分析公式 (2-25) 知，初始剪力 Q_0 对其作用点 A 以右部分的挠度影响为 $Q_0 \frac{a}{bk} \varphi_1(ax)$ 。那么集中力 P 对其作用点 C 以右部分的挠度影响，正如在 C 点增加一个初参数 P 时（对 C 点以右部分而言）所产生的挠度。考虑到这时的坐标原点应为 $x = a_P$ ，则 P 对其作用点 C 以右部分挠度影

响的附加项为

$$\Delta y_x = \frac{\alpha P}{bk} - \varphi_4[\alpha(x - a_p)] \quad (x \geq a_p)$$

或简写为

$$\Delta y_x = \frac{\alpha P}{bk} \varphi_4(x - a_p) \quad (x \geq a_p) \quad (2-26)$$

式中 $\varphi_4(x - a_p) = \varphi_4[\alpha(x - a_p)]$ 表示以 $\alpha(x - a_p)$ 为自变量, 按公式 (2-24) 计算的双曲线三角函数, 仅 $(x - a_p)$ 为正时才取值 (以下的表示法相同)。

同理, 对于集中力偶 M 作用点 D 以右的部分, 应考虑以 D 点为坐标原点, 增加初参数一 M 后的挠度影响附加项, 即

$$\Delta y_x = -\frac{2\alpha^2 M}{bk} \varphi_3(x - a_m) \quad (x \geq a_m) \quad (2-27)$$

分布荷载 $q(x)$ 对其以右部分的挠度影响附加项, 应分为两种情况讨论。一是在荷载分布范围 EF 内, 即 $a_q \leq x \leq \bar{a}_q$ 时; 二是在荷载分布范围 EF 以远, 即 $x \geq \bar{a}_q$ 时。上述两种情况, 均可把分布荷载视为无限个集中力 $q(u) du$ (图 2-8), 再应用公式 (2-26), 分别在区段 $[a_q, x]$ 及 $[a_0, \bar{a}_q]$ 上积分, 以求得分布荷载 $q(x)$ 在该二范围内引起的挠度附加项:

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_x &= \frac{\alpha}{bk} \int_{a_q}^x q(u) \varphi_4 \alpha(x - u) du & (a_q \leq x \leq \bar{a}_q) \\ \Delta y_x &= \frac{\alpha}{bk} \int_{a_q}^{\bar{a}_q} q(u) \varphi_4(x - u) du & (x \geq \bar{a}_q) \end{aligned} \right\} \quad (2-28)$$

运用相同的方法, 可求得各段角变位、弯矩及剪力的附加项。将它们进行汇总, 最后得弹性地基等截面直梁的变位及内力的一般公式为

$$\left. \begin{aligned}
y_x &= y_0 \varphi_1 - \theta_0 \frac{1}{2a} \varphi_2 + M_0 \frac{2a^2}{bk} \varphi_3 + Q_0 \frac{a}{bk} \varphi_4 + \frac{aP}{bk} \varphi_1 (x - a_m) \\
&\quad - \frac{2a^2 M}{bk} \varphi_3 (x - Q_m) + \frac{a}{bk} \int_{a_q} q(u) \varphi_4(x-a) du \\
Q_x &= y_0 a \varphi_4 + \theta_0 \varphi_1 - M_0 \frac{2a^3}{bk} \varphi_2 - Q_0 \frac{2a^3}{bk} \varphi_3 - \frac{2a^2 P}{bk} \varphi_3 (x - a_p) \\
&\quad + \frac{2a^3 M}{bk} \varphi_2 (x - a_m) - \frac{2a^2}{bk} \int_{a_q} q(u) \varphi_3(x-u) du \\
M_x &= -y_0 \frac{bk}{2a^2} \varphi_3 + \theta_0 \frac{bk}{4a^3} \varphi_4 + M_0 \varphi_1 + Q_0 \frac{1}{2a} \varphi_2 + \frac{P}{2a} \varphi_2 (x - a_p) \\
&\quad - M \varphi_1 (x - a_m) + \frac{1}{2a} \int_{a_q} q(u) \varphi_3(x-u) du \\
Q_x &= -y_0 \frac{bk}{2a} \varphi_2 + \theta_0 \frac{bk}{2a^2} \varphi_3 - M_0 a \varphi_4 + Q_0 \varphi_1 + P \varphi_1 (x - a_p) \\
&\quad + a M \varphi_1 (x - a_m) + \int_{a_q} q(u) \varphi_1(x-u) du
\end{aligned} \right\} \quad (2-29)$$

式中 y_0 、 Q_0 ——由边界条件确定的初参数，意义同前；

a_m 、 a_p ——集中力偶 M 及集中力 P 的作用点坐标；

a_q ——分布荷载的坐标；

$\varphi_1 \sim \varphi_4$ ——以 ax 为自变量的双曲线三角函数，按公式 (2-22) 计算；

$\varphi_i(x-u)$ ——以 $\alpha(x-u)$ 为自变数的双曲线三角函数 ($i = 1 \sim 4$)，仍按公式 (2-22) 计算，仅在变量 $(x-u)$ 为正时才取值，为负时舍去。若取 $u = a_p$ ，得 $\varphi_i(x - a_p)$ 。取 $u = a_m$ ，得 $\varphi_i(x - a_m)$ ；

$\int_{a_p}^{\quad}$ ——当 $a_p \leq x \leq \bar{a}_q$ 时，积分上限取 x ，当 $x \geq \bar{a}_q$

时, 积分上限取 \bar{a}_q 。

五、弹性地基短梁、长梁和刚性梁

上面讨论弹性地基梁一般情况的解。在工程实践中, 为了计算方便, 在一定条件下, 可以对问题进行一定的简化。定义换算长度 $\lambda = \alpha l$, 描述梁的刚度大小而将梁分为下面三类:

(1) 短梁, 当 $1 < \lambda < 2.75$ 时, 这时计算应该按上面的分析进行。

(2) 刚性梁, 当 $\lambda \leq 1$ 时, 这时梁长度相对于截面较小, 可以认为梁是刚性的, 即 $EI \rightarrow \infty$ 或 $\alpha = 0$ 。因此地基反力可按直线分布考虑, 使计算大大地简化。

例如, 当全梁有线性分布荷载时 (图 2-11):

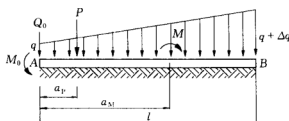


图 2-11 全梁有分布荷载的刚性梁

$$\left. \begin{aligned} y_x &= y_0 - \theta_0 x \\ \theta_x &= \theta_0 \\ M_x &= -y_0 \frac{bk}{2} x^2 + \theta_0 \frac{bk}{6} x^3 + M_0 + Q_0 x + \frac{qx^2}{2} + \frac{\Delta q}{6l} x^3 \\ &\quad - M \{x - a_m\}^0 + p \{x - a_p\} \\ Q_x &= -y_0 b k x + \theta_0 \frac{bk}{2} x^2 + Q_0 + qx + \frac{\Delta q}{2l} x^2 + p \{x - a_p\}^0 \end{aligned} \right\} \quad (2-30)$$

式中 $\{ \xi \} = \begin{cases} \{ \xi \} = 0 & \xi \leq 0 \\ \{ \xi \} = \xi & \xi > 0 \end{cases}$

(3) 长梁:

当 $\lambda \geq 2.75$ 时, 称为长梁。如果荷载作用点距梁的两端的换算长度 $\lambda \geq 2.75$ 时, 则可忽略荷载对梁端的影响, 这类梁称为无限长梁。若荷载作用点仅距梁的一端的换算长度 $\lambda \geq 2.75$, 称半无限长梁。由于无限长梁可化为两个半无限长梁计算, 而且我们局限于巷道金属支架的应用, 这里只给出全跨梯形分布荷载半无限长梁 (图 2-12) 的解。

$$\left. \begin{aligned} y_x &= M_0 \frac{2\alpha^2}{bk} \varphi_5 + Q_0 \frac{2\alpha}{bk} \varphi_6 + \frac{1}{bk} \left(q + \frac{x}{l} \Delta q \right) \\ \theta_x &= M_0 \frac{4\alpha^3}{bk} \varphi_6 + Q_0 \frac{2\alpha^2}{bk} \varphi_7 - \frac{\Delta q}{bkl} \\ M_x &= M_0 \varphi_7 + Q_0 \frac{1}{a} - \varphi_8 \\ Q_x &= -2M_0 \alpha \varphi_8 + Q_0 \varphi_5 \end{aligned} \right\} \quad (2-31)$$

式中双曲线三角函数 $\varphi_5 \sim \varphi_8$ 按下式计算

$$\left. \begin{aligned} \varphi_5 &= \varphi_{5x} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 = e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x) \\ \varphi_6 &= \varphi_{6x} = \varphi_1 - \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_4) = e^{-\alpha x} \cos \alpha x \\ \varphi_7 &= \varphi_{7x} = \varphi_1 - \varphi_3 + \varphi_4 = e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) \\ \varphi_8 &= \varphi_{8x} = \frac{1}{2} (\varphi_2 + \varphi_4) - \varphi_3 = e^{-\alpha x} \sin \alpha x \end{aligned} \right\} \quad (2-32)$$

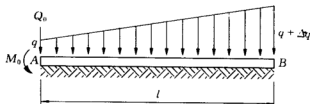


图 2-12 全跨梯形分布荷载半无限长梁

第三节 梯形金属支架的计算

一、梯形金属支架的计算简图

梯形金属支架一般是由棚梁和棚柱组成。棚梁和棚柱的连接方式有多种多样，从力学计算角度上考虑可分为铰接（搭接或铰链连接）、固定连接（螺栓连接）和介于铰接和固定连接的弹性连接。

棚柱底端一般都有一小部分插入底板，约束了棚柱的内移，因此棚柱底端可以弹性约束或连杆约束表示。

棚梁与棚柱是铰链约束时的梯形金属支架，整个支架表面上看是一个可变机构，实际上支架的变形是受到围岩的约束的，因此仍然可视作静定结构。为表示这一特征，在铰链处增加一个横向连杆，图 2-13 是梯形金属

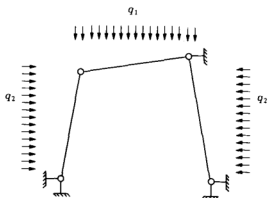


图 2-13 梯形金属支架计算简图

支架的计算简图。

二、梁柱为铰结情况的计算

梁柱为铰结的情况是梯形金属支架最常见的情况，在荷载作用下，为一静定结构。每一构件（棚梁或棚柱）均为受轴力和分布荷载作用的简支梁。

梁中最大应力为

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W_x} + \frac{N}{A} \\ &= \frac{qa^2}{8W_x} + \frac{q_h h}{A}\end{aligned}\quad (2-33)$$

柱中最大应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{q_h h^2}{8W_x} \cos \alpha + \frac{q_v a}{2A \cos \alpha} \quad (2-34)$$

式中 a ——棚梁长度；

h ——巷道高度；

q_h ——水平压力；

q_v ——围岩垂直压力；

A 、 W_x ——型钢截面面积和 x 方向截面惯性矩；

α ——棚柱倾角。

强度校核：

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$$

式中 $[\sigma]$ ——型钢的许用应力； $[\sigma] = \frac{\sigma_s}{n}$

σ_s ——材料的屈服极限；

n ——安全系数。

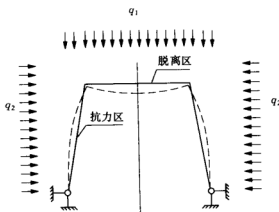


图 2-14 梯形刚性支架变形

三、梁柱为刚性连接情况的计算

棚梁与棚柱为刚性连接，形成一刚架形式，在垂直荷载的作用下，棚梁产生变形，同时棚柱也产生变形，如图 2-14 所示。棚柱的变形使围岩对棚柱产生弹性抗力，这一点与拱形支架情况一样，其计算方法将在下一节介绍。

第四节 拱形金属支架的计算

巷道金属支架中，拱形支架是常见的支架形式，包括有直腿拱形、曲腿拱形、马蹄形等。拱形金属支架一般由拱梁和腿柱（有时加反底拱梁）组成，拱梁和腿柱一般为刚性连接。同时拱梁与腿柱又都是通过背板密贴于围岩，一方面在围岩压力作用下产生变形，另一方面围岩又约束支架的变形而产生了弹性抗力，因此在支架的力学计算中应与围岩的受力和变形一同考虑，这也是地下结构的力学计算与一般结构计算的主要区别。

在地下结构内力计算中，力法是发展最早的计算方法。60年代以前就有假定抗力法、局部变形地基梁法、共同变形地基梁法等经典的计算方法。以后随着计算机的发展，在地下结构计算中出现了矩阵分析法、有限元法等。下面简单介绍几种实用的计算方法，运用计算机进行数值计算和分析将在第五章讨论。

一、假定抗力法

拱形金属支架在围岩荷载作用下产生了弹性抗力，在一般情况下弹性抗力分布是很复杂的，在计算上也是繁琐的。为了简化计算，根据实测和理论分析将弹性抗力假设为抛物线形分布，如图 2-15 所示。假设弹性抗力的分布为：抗力区位于拱腿底部以上，拱顶两侧各 45° 处以下的范围内，最大抗力处为 $\frac{2}{3}$ 的位置上。如果最大弹性抗力为 σ_h ，则弹性抗力的分布为

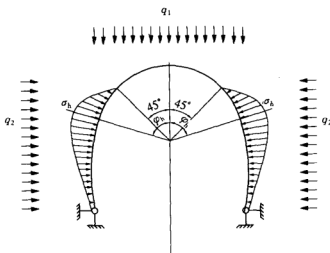


图 2-15 假定抗力分布

$$\left. \begin{array}{l} \text{抗力最大值以上: } \sigma = \sigma_h \frac{1 - 2\cos^2 \varphi}{1 - 2\cos^2 \varphi_h} \\ \text{抗力最大值以下: } \sigma = \sigma_h \left(1 - \frac{y'^2_1}{y_a^2} \right) \end{array} \right\} \quad (2-35)$$

式中 φ ——最大抗力处以上任意截面与垂直线的夹角；

φ_h ——最大抗力处截面与垂直线的夹角；

y'_1 ——最大抗力处以下任意截面至最大抗力处截面的垂直距离；

y_a ——柱底至最大抗力处垂直距离；

σ_h ——最大抗力值。

考虑对称性，假设从拱顶切开，顶端施加未知力矩 x_1 和水平未知力 x_2 ，即得到解题的基本静定结构，如图 2-16 所示。

该问题的力法典型方程为：

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_1p + \Delta_1\sigma = 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_2p + \Delta_2\sigma = 0 \end{array} \right\} \quad (2-36)$$

式中 δ_{ik} ——在基本结构中当 $x_k = 1$ 时，在拱顶处沿 x_i 作用方

向的变位；

Δ_{ip} ——在基本结构中，主动荷载作用下在拱顶处沿 x_i 作用方向的变位；

Δ_{is} ——在基本结构中，弹性抗力作用下在拱顶处沿 x_i 作用方向的变位。

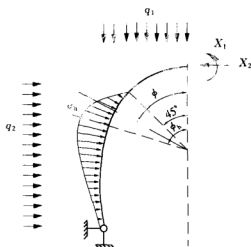


图 2-16 基本静定结构

最大弹性抗力 σ_h 为未知量，由式 (2-36) 可以看出，所得的 x_1 、 x_2 为应力 σ_h 的函数，因此应先计算出 σ_h 值。根据局部变形理论及叠加原理有：

$$\delta_h = \frac{\sigma_h}{k} = x_{h1} \delta_h + x_{h2} \delta_{n2} + \Delta_{hp} + \Delta_{hs} \quad (2-37)$$

式中 δ_h ——最大抗力值所在的截面 h 的径向变位；

δ_{hi} ——在基本结构中， $x_i = 1$ 作用下在 h 点产生的径向变位；

Δ_{hp} ——在基本结构中，主动荷载作用下在 h 点产生的径向变位；

Δ_{hs} ——在基本结构中，弹性抗力作用下在 h 点产生的径

向变位。

式 (2-36) 和式 (2-37) 联立求解 x_1 、 x_2 和 σ_h 。

二、局部变形地基梁法

1. 计算简图

局部变形地基梁法被广泛地应用于地下结构衬砌中，是一种有效的实用计算方法。

根据直腿拱形金属支架的结构特点，将拱梁和腿部分开计算，然后根据两者在拱脚（腿上端）的连续条件确定。在计算中，拱梁视为弹性固定的无铰拱，腿柱视为在围岩上的地基梁。拱梁和腿柱的内力和变形是相互影响的，表现为计算拱梁时拱脚的变位应取柱顶的变位，计算腿柱时柱顶的边界条件应与拱脚的内力和变位一致。

局部变形地基梁法计算简图如图 2-17 所示，其中弹性抗力按腿柱和拱梁分别考虑，对于拱梁，仍然采用假定抗力二次抛物线分布：

$$\sigma = \sigma_h \frac{\cos^2 \varphi_a - \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi_a - \cos^2 \varphi_n} \quad (2-38)$$

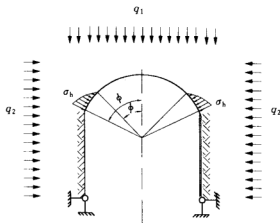


图 2-17 直腿拱形支架计算简图

式中 σ_h 为拱脚处弹性抗力值, 按几何关系有:

$$\sigma_h = \sigma_h \sin \varphi_n \quad (2-39)$$

σ_h ——腿柱顶端处弹性抗力值, 由腿柱计算获得。

腿柱的弹性抗力按 Winbler 假定, 利用弹性地基梁理论确定。

由于腿柱一般都有一部分插入巷道底板, 约束了腿柱的内移, 因为拱形刚性可缩性支架腿柱下端一般按连杆约束考虑。

2. 拱梁的计算

考虑对称性, 仍然假想将拱顶切开, 并作用基本未知力 x_1 、 x_2 , 同时在拱脚处也切开, 作用于相对应的未知内力, 构成拱圈力法计算的基本结构, 如图 2-18 所示。

拱梁的法方程可写为:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1p} + \Delta_{1\sigma} + \theta_0 &= 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2p} + \Delta_{2\sigma} + \theta_0 f + u_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-40)$$

式中 δ_{ik} 、 Δ_{ip} 和 $\Delta_{i\sigma}$ 的含义与式 (2-37) 相同;

θ_0 、 u_0 ——拱脚处的转角和水平位移:

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= \theta_1 x_1 + (\theta_2 + f\theta_1) x_2 + \theta_p \\ u_0 &= u_1 x_1 + (u_2 + fu_1) x_2 + u_p \end{aligned} \right\} \quad (2-41)$$

θ_1 、 u_1 ——在柱顶部作用单位力矩引起的柱顶角变位和水

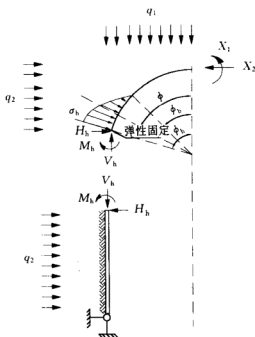


图 2-18 基本静定结构

平位移；

θ_2 、 u_2 ——在柱顶部作用单位水平力引起的柱顶角变位和水平位移；

θ_p 、 u_p ——外荷载（包括主动荷载和弹性拉力）引起柱顶角变位和水平位移；

f ——拱的矢高。

由于计算拱梁内力时在拱脚处的变形应等于柱顶的变形，所以 θ_1 、 u_1 、 θ_2 、 u_2 和 θ_p 、 u_p 应按弹性地基梁理论计算。计算方法已经在第二节说明了。这里应该强调的是，在计算时，首先应判断是长梁、短梁或刚性梁，然后代入相应的公式进行计算。至于最大弹性抗力，仍然可用 x_1 和 x_2 来表示：

$$u_0 = \frac{\sigma_h}{k} = x_1 u_1 + x_2 (u_2 + f u_1) + u_p \quad (2-42)$$

联合求解式 (2-40) 和式 (2-42) 即可得出 x 、 x_2 和 σ_h 。

三、连杆法

1. 计算简图

用连杆法计算拱形刚性金属支架的计算简图如图 2-19 所示，从图中可以看出连杆法处理拱形金属支架问题作了如下的简化：

- (1) 在拱梁，用直线杆体来代替圆弧杆件；
- (2) 用结点集中荷载代替作用在支架上的分布荷载；
- (3) 围岩弹性抗力用结点上的弹性支承连杆反力来代替，围岩变形按 Winkler 弹性地基梁理论计算；
- (4) 与前面一样，假设弹性抗力仅分布在拱顶两边 45° 以外的区间。因此拱顶两边 $2\varphi_0 = 90^\circ$ 范围内的脱离区不设连杆。

2. 内力的计算

以图 2-19 所示马蹄形刚性金属支架为例，根据对称性，取支架的一半考虑，并且将支架的每侧划分七个单元。单元与单元

少间田铰链连接再加上一个未知弯矩 M_i 表示, 即得问题的基本结构。如图 2-20 所示, 该结构是支承于弹性连杆的铰接杆系, 问题为六次超静定。

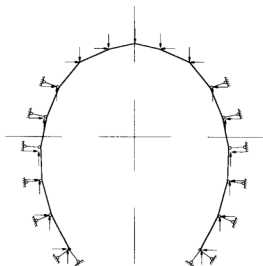


图 2-19 连杆法计算简图

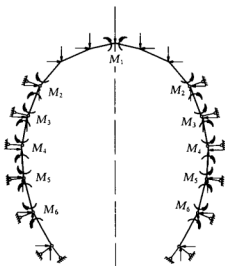


图 2-20 连杆法基本静定结构

以各铰两侧的杆件截面相对转角为零可建立求解 $M_1 \sim M_6$ 多余应力的力法典型方程:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}M_1 + \delta_{12}M_2 + \delta_{13}M_3 + \delta_{14}M_4 + \delta_{15}M_5 + \delta_{16}M_6 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21}M_1 + \delta_{22}M_2 + \delta_{23}M_3 + \delta_{24}M_4 + \delta_{25}M_5 + \delta_{26}M_6 + \Delta_{2p} &= 0 \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta_{61}M_1 + \delta_{62}M_2 + \delta_{63}M_3 + \delta_{64}M_4 + \delta_{65}M_5 + \delta_{66}M_6 + \Delta_{6p} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-43)$$

式中 δ_{ik} ——基本静定结构中在 i 结点上作用一对单位弯矩 $M = 1$ 产生 k 结点两侧杆件的相对转角;

Δ_{ip} ——基本静定结构中, 主动荷载 P 作用下产生 i 结点两侧杆件的相对转角。

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ik} &= \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_k}{EI} ds + \sum \frac{\overline{N}_i \overline{N}_k}{EF} S + \sum \frac{R_i R_k}{D} \\ \Delta_{ip} &= \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_p}{EI} ds + \sum \frac{\overline{N}_i \overline{N}_p}{EF} S + \sum \frac{R_i R_p}{D} \end{aligned} \right\} \quad (2-44)$$

式中 \overline{M}_i 、 \overline{N}_i 、 R_i ——在基本静定结构中， i 结点上作用一对单位弯矩所产生的弯矩、轴力和支座反力；

\overline{M}_k 、 \overline{N}_k 、 R_k ——在基本静定结构中， k 结点上作用一对单位弯矩所产生的弯矩、轴力和支座反力；

\overline{M}_p 、 \overline{N}_p 、 R_p ——在基本静定结构中，外荷载作用下产生的弯矩、轴力和支座反力；

D ——支座刚度，根据 Winkler 假定，有：

$$D = ks_i b$$

s_i —— i 结点上两侧杆件平均长度；

b ——支架间距。

由式 (2-43) 求出多余未知力后，可由静力平衡条件求出金属支架任一截面的内力。

第三章 U 型钢可缩性支架的计算原理

第一节 概 述

U 型钢可缩性支架由于结构简单, 具有较好的缩动性能, 对动压的适应性强, 在国内外得到广泛的应用。但到目前为止, 对 U 型钢可缩性支架的设计、选用及其参数的确定仍然停留在经验上, 对 U 型钢可缩性支架的力学分析一般只能作一些定性的分析, 有的文献也试图进行定量计算, 将 U 型钢可缩性支架简化成为一平面刚架, 按刚性支架计算模型进行设计计算, 例如对直腿半圆拱 U 型钢可缩性支架简化成如图 3-1 所示的平面刚架计算简图, 然后用第二章的刚性金属支架计算模型进行计算。

实际上, 一个 U 型钢可缩性支架是由若干段 U 型钢装配而成。一段 U 型钢与另一段 U 型钢采用搭接, 用卡缆连接起来, 如图 3-2 所示。

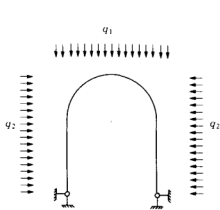


图 3-1 平面刚架计算模型

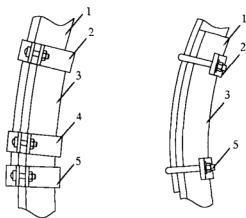


图 3-2 U 钢支架的搭接

正是由于这些搭接段，U型钢可缩性支架能够在一定的条件下实现缩动。而前面介绍的平面刚架计算模型忽略了搭接部分的存在，这种简化存在着以下的问题：

(1) 搭接部分是由两节U型钢的端部与卡缆组成，因此搭接部分的刚度、强度与单节U型钢有很大的不同，其计算结果与实际情况有较大的差异，不能反映实际情况。

(2) 这种平面刚架模型不能计算出卡缆的受力大小，因而也不能对卡缆进行内力和强度计算。

(3) 这种计算模型不能反映卡缆预紧力产生的支架内力。

(4) 不能定量分析支架的缩动条件和缩动后的支架的内力变化。

因此，U型钢可缩性支架的力学计算应提出一种能包含搭接部分在内的计算简图。

第二节 U型钢可缩性支架计算简图

对U型钢可缩性支架进行力学计算与分析的目的是：计算支架各杆件的内力，包括卡缆、螺栓的内力，以便进行支架选型、设计和支架强度以及稳定性验算；研究支架在与围岩相互作用中，即在外荷载作用下卡缆及搭接部分的力学行为，以便研究支架的缩动性能及承载能力达到优化支架形式及支护参数的目的。

U型钢可缩性支架所受的荷载包括以下几部分：

(1) 围岩对支架产生的主动压力，即由于围岩的变形、破坏产生的对支架的压力。

(2) 围岩对支架产生的弹性抗力，由于支架在外荷载作用下产生变形，围岩约束支架的变形产生的弹性约束力。

(3) U型钢可缩性支架安装时，必需拧紧卡缆，因而对支架产生预应力。

(4) U型钢可缩性支架在外荷载作用下，当外荷载达到一定

程度，支架产生缩动，因此产生相应的装配应力。

以上荷载在进行 U 型钢可缩性支架的力学分析时，都应该考虑进去。因此，如果简单地应用图 3-1 的计算简图，显然是不能考虑由于卡缆预紧力产生的支架内力以及由于支架缩动产生的装配应力，也就不能讨论卡缆预紧力对支架缩动的影响和支架缩动后的承载能力等问题。

第三节 搭接部分的等效截面参数

由于支架所受的荷载比较复杂，再加上 U 型钢可缩性支架的搭接部分的存在，给支架的计算带来很大的困难。在现场中通过观察可以发现，U 型钢可缩性支架架设一段时间后都会出现搭接部分下端不同程度的张开，如图 3-3 所示，有的甚至卡缆受力太大被拉坏，而导致整个支架的失效。

由于 U 型钢可缩性支架计算比较复杂，如果取搭接部分作为单独的研究对象，则问题应变得简单得多。截取搭接部分如图 3-4 所示，搭接部分两端的内力分别为 N_1 、 Q_1 、 M_1 和 N_2 、 Q_2



图 3-3 搭接部分的变形

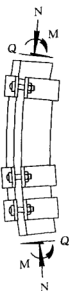


图 3-4 搭接部分两端的内力

和 M_2 ，从图中可以看出，当 M_1 和 M_2 到达一定值时，则出现图 3-3 的变形则是必然的。

这里引入等效截面杆件概念。搭接部分作为 U 型钢可缩性支架的一小部分，可以用一等效截面杆件代替，这一等效截面杆件满足以下条件：

- (1) 等效截面杆件的长度与搭接部分的实际长度一致；
- (2) 等效截面杆件为等截面直杆；
- (3) 当等效截面杆件和搭接部分两端受相同的内力时产生相同的变形，包括相对角度变形和线变形。

由于搭接部分长度不大，一般只有 300 ~ 500mm，在这种条件下，剪应力 Q 相对角变形影响很小，可以忽略不计，即有 $M_1 = M_2 = M$ 。

以采用螺栓卡缆的情况为例如图 3-3 (a)，等效截面参数的计算可以这样考虑：卡缆用一弹簧代替，静力计算时搭接部分上端用一铰接点表示，如图 3-5 所示。搭接部分两端产生相同的变形可以用力法求解：

$$\Delta\varphi = \delta_{11} M \quad (3-1)$$

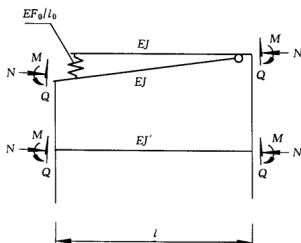


图 3-5 等效截面杆件

式中 $\Delta\varphi$ ——搭接产分两端相对角变形；

δ_{11} ——柔度系数，即在两端作用一对单位弯矩产生的相对角变形。

对于图 3-5：

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1^2}{EJ} ds + \int \frac{F_1^2}{F_F} ds \quad (3-2)$$

式中 M_1 ——杆件的内弯矩；

F_1 ——弹簧的内力。

利用图乘法计算，如图 3-6，可得：

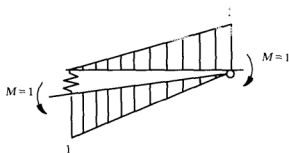


图 3-6 等效截面参数的计算

$$\delta_{11} = \frac{2l}{3EI} + \frac{l_0}{EF_0 \cdot l} \quad (3-3)$$

式中 I ——U 型钢的截面惯性矩；

l_0 、 F_0 ——卡缆的计算长度和截面积， $\frac{F_0}{l_0}$ 为卡缆的整体刚度，可由实验获得，对于一些刚度较大的卡缆，如耳楔

式卡缆， $\frac{EF_0}{l_0} = \infty$ 。

而等效截面杆件：

$$\delta_{11} = \frac{l_1}{EJ'} \quad (3-4)$$

式中 J' ——等效面积惯性矩；

比较式 (3-3) 和式 (3-4) 可得

$$J' = \left(\frac{2}{3J} + \frac{l_0}{F_0 l^3} \right)^{-1} \quad (3-5)$$

等效截面面积与单枝 U 型钢的截面积是相等的

$$F' = F \quad (3-6)$$

实验确定方法：

等效截面参数也可以通过实验室实验用两段 U 型钢和卡缆按搭接部分的实际情况进行试验，用四点弯曲试验方法，如图 3-7 所示。通过施加荷载 P ，获得搭接部分的弯矩 M ，并通过量测的出 $\Delta\varphi$ ，由式 (3-1) 求得 δ_{II} ，并与式 (3-4) 比较得出 J' 的值。

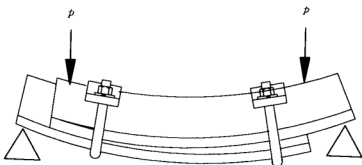


图 3-7 用实验方法确定等效截面参数

U 型钢可缩性支架计算简图：

有了等效截面杆件，U 型钢可缩性支架的计算就可以大大地简化，图 3-6 (a) 是三节式直腿半圆拱支架的计算简图，图 3-6 (b) 是四节圆形可缩性支架的计算简图。

在进行 U 型钢可缩性支架的内力计算和强度校核，可按图 3-8 的阶梯形变截面刚架进行计算支架内力，得出搭接部分两端的内力，再按图 3-5 计算卡缆和搭接部分 U 型钢内力。

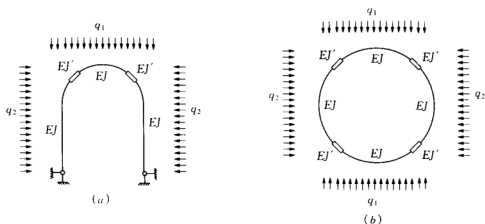


图 3-8 U 型钢可缩性支架的计算简图
(a) 直腿半圆拱可缩性支架；(b) 圆形可缩性支架

第四节 卡缆预紧力所产生的支架内力计算

为了使 U 型钢可缩性支架具有一定的初撑力，必需对搭接部分上的卡缆施加一定的预紧力。一般搭接部分视为理想的面接触，即卡缆的预紧力直接通过 U 型钢搭接的接触面直接传递，当然不会出现支架内力。但在现场安设 U 型钢可缩性支架时，一般是先立腿柱，再上拱梁，最后上卡缆，并使其达到一定的预紧力。因此，拱梁和腿柱之间的接触一般是在搭接部分的上端，而下端有所张开，这时对卡缆施加预紧力必然会产生支架内力。在现场调查中可以发现，即使施加预紧力后，U 型钢可缩性支架搭接部分下端仍然有不同程度的张开现象。

由卡缆预紧力产生的支架内力按图 3-9 的计算简图进行计算。图 3-9 的结构为一静定体系，可直接应用静力平衡关系求出支架内力。例如，对于直腿半圆拱拱顶处的内力：

$$\left. \begin{aligned} F_{N_0}^N &= \frac{N_0 R \sin \alpha_2}{R \cos \alpha_1 + H} \\ F_{Q_0}^N &= 0 \\ F_M^N &= \frac{N_0 R \sin \alpha_2}{R \cos \alpha_1 + H} (R + H) \end{aligned} \right\} \quad (3-7)$$

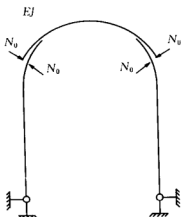


图 3-9 卡缆预紧力
产生的支架内力

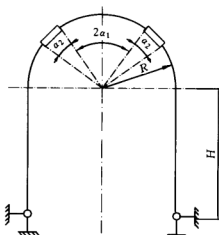


图 3-10 直腿半圆拱可缩性
支架的几何尺寸

式中 N_0 ——卡缆的预紧力；

$F_{N_0}^N$ 、 $F_{Q_0}^N$ 、 F_M^N ——由卡缆预紧力 N_0 产生的拱顶轴力、剪力和弯矩；

R 、 H 、 α_1 、 α_2 ——直腿半圆拱的几何尺寸如图 3-10 所示。

卡缆预紧力是通过拧紧卡缆上的螺母实现的，预紧力大小与拧紧力矩的关系为：

$$F = \frac{M}{\lg (\lambda + P') \frac{d_2}{2} + f \left(\frac{D_1 + d_0}{4} \right)} \quad (3-8)$$

式中 λ ——螺纹升角， $\lambda = \lg^{-1} \left(\frac{t_0}{\pi d_2} \right)$ ；

t_0 ——螺纹升距；

d_2 ——螺纹中径；

P' ——当量摩擦角， $p' = \text{tg}^{-1} f'$

f' ——当量摩擦系数， $f' = \frac{f}{\cos \beta} = \frac{f}{\cos 30^\circ} = 1.155f$

f ——钢材间的摩擦系数， $f = 0.15 \sim 0.2$

2β ——三角形螺纹的剖面角， $\beta = 60^\circ$

d_0 ——卡缆板的螺栓孔径；

D_1 ——六角螺母内切圆直径。

例如：采用 M24 螺栓，拧紧力矩为 $150\text{N} \cdot \text{m}$ ， $d_0 = 26\text{mm}$ 的普通三角形螺纹， $d = 24\text{mm}$ ， $d_2 = 22.052\text{mm}$ ， $t_0 = 3\text{mm}$ ， $D_1 = 36\text{mm}$ 。

$$\text{则 } \lambda = \text{tg}^{-1} \left(\frac{t_0}{\pi d_2} \right) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{3}{\pi \times 22.052} \right) = 2.48^\circ$$

$$p' = \text{tg}^{-1} f' = \text{tg}^{-1} (1.155f) = \text{tg}^{-1} (1.155 \times 0.2) \\ = 13.01^\circ$$

$$F = \frac{M}{\text{tg} (\lambda + p') \frac{d_2}{2} + f \left(\frac{D_1 + d_0}{2} \right)} \\ = \frac{150 \times 10^3}{\text{tg} (2.48^\circ + 13.01^\circ) \frac{22.052}{2} + 0.2 \left(\frac{36 + 26}{4} \right)} \\ = 24.1 \times 10^3 \text{N}$$

这样 U 型钢可缩性支架在缩动前的内力应该由两部分组成，即由围岩的荷载产生的支架内力和预紧力产生的支架内力：

$$\left. \begin{aligned} W_N &= W_N^P + W_N^{N_0} \\ W_Q &= W_Q^P + W_Q^{N_0} \\ W_M &= W_M^P + W_M^{N_0} \\ N_{CD} &= N_{CD}^P + N_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-9)$$

式中 W_N 、 W_Q 、 W_M ——支架上任一点 W 处的轴力、剪力和弯矩；

W_N^P 、 W_Q^P 、 W_M^P ——由外荷载 P 产生的支架上任一点 W 点处的轴力、剪力和弯矩；

$W_N^{N_0}$ 、 $W_Q^{N_0}$ 、 $W_M^{N_0}$ ——由卡缆预紧力 N_0 产生的支架上任一点 W 点处的轴力、剪力和弯矩；

N_{CD} ——卡缆所受的拉力；

N_{CD}^P ——卡缆在外荷载 P 作用下所受的拉力；

N_0 ——卡缆预应力。

第五节 U型钢可缩性支架缩动时产生的支架内力

U型钢可缩性支架在围岩荷载作用下产生缩动，缩动后拱梁下沉，拱腿内倾，搭接部分增长，整个支架的几何尺寸发生了变化，因此必然产生了装配应力，支架的内力也随之发生变化，所以，U型钢可缩性支架的缩动，一方面使围岩的作用力下降使支架的内力下降，但由于缩动产生的装配应力使支架的内力也相应地有所增加。

以直腿半圆拱可缩性支架为例，假设搭接部分上无卡缆约束力，仅考虑支架几何上的变化，如图 3-11 所示，当支架产生缩动时，拱梁下沉，这时搭接部分下端必然张开，其张开量与支架的缩动量有关，支架缩动量越大，搭接部分下端的张开量就越大，由于卡缆的存在，卡缆对搭接部分的变形产生出弹性约束，相当于给支架一对作用力，使得整个支架产生内力的变化。

无卡缆约束时，支架缩动引起卡缆下端张开，其张开量可利用虚功原理求得，如图 3-12 所示，这是一静定结构，由于无卡缆约束，支架的缩动 U型钢不产生任何内力和变形。因此结构上各点的位移属刚体位移，可利用刚体位移求解。应该注意，虚设单位荷载的目的是希望在虚功方程中包括拟求的未知位移，因此在卡缆的位置上虚设一单位荷载，以达到做“虚功”的目的。

虚功方程为：

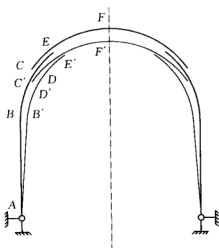


图 3-11 支架缩动后
搭接部分的变形

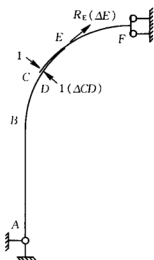


图 3-12 搭接部分下端
张开量的计算

$$l \cdot \Delta_{CD} - R_E \Delta_E = 0 \quad (3-10a)$$

得: $\Delta_{CD} = R_E \Delta_E \quad (3-10b)$

式中 Δ_{CD} ——假设无卡缆时，由于支架的缩动引起搭接部分下端的张开量；

Δ_E ——搭接部分的缩动量，即拱梁的 E 点与拱腿的 E 点相对位移量；

R_E ——沿 Δ_{CD} 方向作用一对单位力，拱梁与拱腿在切线方向的相互作用力。在图 3-12 中，由于 R_E 和 Δ_E 符号相反，因而式 (3-10a) 中左边第二项取负号。

对于直腿半圆拱 U 型钢可缩性支架在单位力作用下， R_E 可以由图 3-13 求出，而拱梁，由 $\Sigma F_y = 0$ ：

$$-\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + R_E \cos \alpha_1 + S_E \sin \alpha_1 = 0$$

得

$$S_E = \frac{1}{\cos \alpha_1} [\cos \alpha_1 + \alpha_2 - R_E \sin \alpha_1] \quad (3-11)$$

这里, S_E 为 E 点的法向接触力。

对于腿部: 由 $\Sigma M_A = 0$ 。

$$[H + R\cos(\alpha_1 + \alpha_2)]\sin(\alpha_1 + \alpha_2) + R_E\cos\alpha_1(H + R\cos\alpha_1) - S_E\sin\alpha_1[H + R\cos\alpha_1] = 0 \quad (3-12)$$

将式 (3-11) 代入式 (3-12)、消去 S_E , 求得 R_E 。

$$R_E = \frac{1}{H + R\cos\alpha_1} \{ (H + R\cos\alpha_1)\sin\alpha_1\cos(\alpha_1 + \alpha_2) - [H + R\cos(\alpha_1 + \alpha_2)]\sin(\alpha_1 + \alpha_2)\cos\alpha_1 \} \quad (3-13)$$

由上式可以判断出 $R_E < 0$, 从式 (3-10b) 可以看出, 当 Δ_E 增大 Δ_{CD} 的方向与单位力相反, 即当支架缩动后, 搭接部分下端有张开的趋势。

这样, 由于支架的缩动产生卡缆拉力可由下式算出:

$$N_1 = \frac{\Delta_{CD}}{\delta_{11}} \quad (3-14)$$

式中 N_1 ——由于支架的缩动产生的卡缆拉力;

δ_{11} ——假设从卡缆的中部切开, 并作用一对单位力, 产生单位力方向的位移

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\overline{M}_i^2}{EJ} ds + \sum \frac{\overline{N}_i^2 l_0}{EF_0} \quad (3-15)$$

式中 M_i 、 N_i ——由单位力作用下引起的支架弯矩和卡缆的拉力, 对于所讨论的搭接部分的卡缆, $\overline{N}_1 = 1$;

EJ ——U 型钢的抗弯刚度;

$l_0 F_0$ ——卡缆的计算长度和截面面积。

如果一个 U 型钢可缩性支架有多个接头, 如 3 个以上, 按式 (3-15) 计算可能会比较繁琐的, 这时可以先计算各搭接部分等效截面参数, 然后按阶梯形变截面刚架计算支座反力及支架内力, 最后利用式 (3-10) 计算卡缆及螺栓内力。

例如, 对于直径半圆拱 U 型钢可缩性支架(图 3-10)情况:

$$\delta_{11} = \int_0^{\alpha_1} \frac{\overline{M}_1^2}{EJ} R d\alpha + \int_{\alpha_1}^{\alpha_1+\alpha_2} \frac{\overline{M}_2^2}{EJ} R d\alpha + \int_{\alpha_1+\alpha_2}^{\pi/2} \frac{\overline{M}_2^2}{EJ} R d\alpha + \int_0^H \frac{\overline{M}_2^2}{EJ} dx \quad (3-16)$$

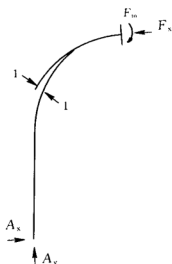


图 3-13 卡缆预紧力产生的支座反力

在图 3-13 所示的单位力作用下，支反力可容易地求得

$$A_y = 0$$

$$A_x = F_x = \frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_1 + H/R}$$

$$F_M = (R + H) F_x$$

式中 A_x 、 A_y ——腿部支座水平和垂直支反力；

F_x 、 F_M ——拱顶截面上的轴向力和弯矩。

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int_0^{\alpha_1} \frac{1}{EJ} [F_x - F_x(1 - \cos \alpha) R]^2 R d\alpha \\ &+ \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{1}{EJ} [F_M - F_x(1 - \cos \alpha) R]^2 R d\alpha \\ &+ \int_{\alpha_1 + \alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{EJ} (F_M - F_x(1 - \cos \alpha) R)^2 R d\alpha \\ &+ \int_0^H (A_x \cdot x)^2 dx \\ &= \frac{RF_x^2}{EJ} \left\{ \left(H^2 + \frac{R^2}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 \right) \right. \\ &\quad \left. + 2RH [1 + \sin \alpha_1 - \sin (\alpha_1 + \alpha_2)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{R^2}{4} [\sin 2\alpha_1 - \sin 2(\alpha_1 + \alpha_2)] \} + \frac{RF_x^2}{EJ'} \{ (H^2 \\
& + \frac{R^2}{2}) \alpha_2 + 2RH [\sin(\alpha_1 + \alpha_2) - \sin \alpha_1] \\
& + \frac{R^2}{4} [\sin 2(\alpha_1 + \alpha_2) - \sin 2\alpha_1] \} + \frac{F_x^2 H^3}{3EJ} \quad (3-17)
\end{aligned}$$

式中 J 、 J' ——U 型钢截面惯性矩和搭接部分的等效截面惯性矩。

将式 (3-17)、式 (3-10) 和式 (3-13) 代入式 (3-14) 即可求出卡缆所受的拉力 N ，然后将 N_1 看作为卡缆预紧力 N_0 ，利用式 (3-7)，即求得不同的缩动量 Δ_E 产生的支座反力以及支架内力。

应该指出的是，在支架缩动过程中，支架的几何参数 α_1 、 α_2 是随着缩动量的变化而变化的，缩动后，拱部就不再是完全的半圆拱了。因此，缩动量较大时，应该分成若干小段逐步计算。

对此，U 型钢可缩性支架在缩动过程中以及缩动之后的支架内力必需由以下三部分组成：

- (1) 围岩的荷载产生的支架内力；
- (2) 卡缆预紧力产生的支架内力；
- (3) 由于支架的缩动产生的支架内力。

因此有：

$$\begin{aligned}
W_N &= W_N^P + W_N^{N_0} + W_N^{N_1} \\
W_Q &= W_Q^P + W_Q^{N_0} + W_Q^{N_1} \\
W_M &= W_M^P + W_M^{N_0} + W_M^{N_1} \\
N_{CD} &= N_{CD}^P + N_0 + N_1
\end{aligned} \quad (3-18)$$

式中 W_N 、 W_Q 、 W_M ——支架上任意一点 W 的轴力、剪力和弯矩；

$W_N^{N_1}$ 、 $W_Q^{N_1}$ 、 $W_M^{N_1}$ ——由于支架的缩动产生的支架上任一点 W 的轴力、剪力和弯矩；

W_N^P 、 W_Q^P 、 W_M^P ——由于外荷载作用产生的支架上任一点
W 的轴力、剪力和弯矩；

$W_N^{N_0}$ 、 $W_Q^{N_0}$ 、 $W_M^{N_0}$ ——由于卡缆预紧力 N_0 产生的支架上任一
点 W 的轴力、剪力和弯矩；

N_{CD} ——卡缆所受的总拉力；

N_{CD}^P ——由于外荷载作用产生的卡缆拉力；

N_1 ——由于支架缩动产生的卡缆拉力；

N_0 ——卡缆预紧力。

第六节 算 例

在这里为了方便起见，仍然考虑三节式直腿半圆拱的 U 型钢可缩性支架情况。如前面所述，计算时可按平面刚架处理，而搭接部分用一等效截面杆件代替。关于荷载的处理，可以用第二章介绍的弹性地基梁理论或假定抗力法等方法进行，在这里为了更清楚地说明问题，不考虑弹性抗力问题，而按给定荷载考虑，假设支架受垂直荷载 q_1 和水平荷载 q_2 的作用，如图 3-8 (a) 所示。计算中仍然考虑外荷载，卡缆预紧力和支架缩动装配应力三方面因素对支架内力的影响。

在外荷载 q_1 和 q_2 作用下，如图 3-8 (a) 所示的结构为一次超静定结构，可用力法求解。根据结构的对称性，取支架的一半考虑，并拱顶的轴力为基本未知量组成基本静定结构。利用力法基本方程。

$$F_N^P = - \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} \quad (3-19)$$

式中 F_N^P ——由外荷载作用引起的拱顶轴力；

δ_{11} ——基本静定结构中，在 F_N^P 上的柔度系数，即在 F_N^P 方向作用一单位力产生的该方向（水平方向）的位移。

Δ_{1p} ——基本静定结构中，在外荷载 q_1 和 q_2 作用下，产生的 F_N^p 方向上的位移。

$$\delta_{11} = \int_0^{\alpha_1} \frac{\overline{M}_1^2}{EJ} ds + \int_{\alpha_1}^{\alpha_1+\alpha_2} \frac{\overline{M}_1^2}{EJ'} ds + \int_{\alpha_1+\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\overline{M}_1^2}{EJ} ds + \int_0^H \frac{\overline{M}_1^2}{EJ} dx$$

这里不定积分：

$$\begin{aligned} k &= \int \overline{M}_1^2 ds \\ &= \int \overline{M}_1^2 R d\alpha \\ &= \int [(R+H) - (1-\cos\alpha) R]^2 R d\alpha \\ &= \left(H^2 + \frac{R^2}{2} \right) \alpha + 2HR \sin\alpha + \frac{R^2}{4} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (3-20)$$

$$\begin{aligned} \therefore \delta_{11} &= \frac{R}{EJ} k \Big|_0^{\alpha_1} + \frac{R}{EJ'} k \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_1+\alpha_2} + \frac{R}{EJ} k \Big|_{\alpha_1+\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{H^3}{EJ} \\ &= \frac{R}{EJ} \left\{ \left(H^2 + \frac{R^2}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 \right) + 2HR [1 + \sin\alpha_1 \right. \\ &\quad \left. - \sin(\alpha_1 + \alpha_2)] + \frac{R^2}{4} [\sin\alpha_1 - \sin 2(\alpha_1 + \alpha_2)] \right\} \\ &\quad + \frac{R}{EJ'} \left\{ \left(H^2 + \frac{R^2}{2} \right) \alpha_2 + 2HR [\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \right. \\ &\quad \left. - \sin\alpha_1] + \frac{R^2}{4} [\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \right. \\ &\quad \left. - \sin 2\alpha_1] \right\} + \frac{H^3}{3EJ} \end{aligned} \quad (3-21)$$

同理，在外荷载 q_1 和 q_2 的作用下，基本静定结构

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= \int_0^{\alpha_1} \frac{1}{EJ} M_p M_1 ds + \int_{\alpha_1}^{\alpha_1+\alpha_2} \frac{1}{EJ'} M_p M_1 ds \\ &\quad + \int_{\alpha_1+\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{EJ} M_p M_1 ds + \int_0^H \frac{1}{EJ} M_p M_1 dx \end{aligned}$$

$$M_1 = H + R \cos\alpha$$

$$\begin{aligned} M_{1p} &= \frac{q_1}{2} R^2 \sin^2\alpha + \frac{q_2}{2} R^2 (1 - \cos\alpha)^2 - \frac{R^2}{2} q_1 - \frac{(R+H)^2}{2} q_2 \\ &= \frac{1}{2} (q_2 - q_1) R^2 \cos^2\alpha - q_2 R^2 \cos\alpha - \left(\frac{H}{2} + R \right) q_2 H \end{aligned} \quad (3-22)$$

不定积分:

$$\begin{aligned}
 K &= \int M_p M_1 ds \\
 &= \frac{1}{2} (q_2 - q_1) R^3 \left(\sin \alpha - \frac{1}{3} \sin^3 \alpha \right) \\
 &\quad + \left[\left(\frac{H}{2} - R \right) q_2 - \frac{H}{2} q_1 \right] R^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right) \\
 &\quad - RH \left(\frac{H}{2} + 2R \right) q_2^2 \sin \alpha - \left(\frac{H}{2} + R \right) q_2 H^2 \alpha \quad (3-23)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \Delta_{lp} = \frac{R}{EJ} K \Big|_0^{\alpha_1} + \frac{R}{EJ'} K \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{R}{EJ} K \Big|_{\alpha_1 + \alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{H^3}{EJ} \left(\frac{5}{24} H + \frac{R}{3} \right) q_2 \quad (3-24)$$

展开得:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{lp} &= \int_0^{\alpha_1} \frac{1}{EJ} M_p M_1 \cdot R d\alpha + \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{1}{EJ'} M_p M_1 \cdot R d\alpha \\
 &\quad + \int_{\alpha_1 + \alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{EJ} M_p M_1 \cdot R d\alpha \int_0^H \frac{1}{EJ} x \cdot \left[- \left(R \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + H \right) q_2 x + \frac{1}{2} x^2 q_2 \right] dx \\
 &= \frac{R}{EJ} \left\{ \frac{1}{2} (q_2 - q_1) R^3 \left(\sin \alpha_1 - \frac{1}{3} \sin^3 \alpha_1 \right) \right. \\
 &\quad + \left[\left(\frac{H}{2} - R \right) q_2 - \frac{H}{2} q_1 \right] R^2 \cdot \left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha_1 \right) \\
 &\quad \left. - RH \left(\frac{H}{2} + 2R \right) q_2 \sin \alpha_1 - \left(\frac{H}{2} + R \right) q_2 H^2 \alpha_1 \right\} \\
 &\quad + \frac{R}{EJ'} \left\{ \frac{1}{2} (q_2 - q_1) R^3 \left[\sin(\alpha_1 + \alpha_2) - \frac{1}{3} \sin^3(\alpha_1 + \alpha_2) \right] \right. \\
 &\quad + \left[\left(\frac{H}{2} - R \right) q_2 - \frac{H}{2} q_1 \right] R^2 \cdot \left[\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \sin 2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) \right] - RH \left(\frac{H}{2} + 2R \right) q_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \\
 &\quad - \left(\frac{H}{2} + R \right) H^2 (\alpha_1 + \alpha_2) q_2 - \frac{1}{2} (q_2 - q_1) R^3 (\sin \alpha_1 \\
 &\quad - \frac{1}{3} \sin^3 \alpha_1) - \left[\left(\frac{H}{2} - R \right) q_2 - \frac{H}{2} q_1 \right] R^2 \left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\alpha_1 \right) \\
 &\quad \left. + RH \left(\frac{H}{2} + 2R \right) q_2 \sin \alpha_1 + \left(\frac{H}{2} + R \right) q_2 H^2 \alpha_1 \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{R}{EJ} \left\{ \frac{1}{2} (q_2 - q_1) R^3 + \frac{\pi}{4} \left[\left(\frac{H}{2} - R \right) q_2 - \frac{H}{2} q_1 \right] R^2 \right. \\
& - RH \left(\frac{H}{2} + 2R \right) q_2 - \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{H}{2} + R \right) q_2 H^2 - \frac{1}{2} (q_2 \\
& - q_1) \cdot R^3 \left[\sin(\alpha_1 + \alpha_2) - \frac{1}{3} \sin^3(\alpha_1 + \alpha_2) \right] - \left[\left(\frac{H}{2} \right. \right. \\
& - R) q_2 - \frac{H}{2} q_1 \left. \right] R^2 \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{1}{4} \sin 2(\alpha_1 + \alpha_2) \right) \\
& + RH \left(\frac{H}{2} + 2R \right) q_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + \left(\frac{H}{2} + R \right) q_2 H^2 (\alpha_1 \\
& + \alpha_2) \left. \right\} + \frac{H^3}{EJ} q_2 \left(\frac{5}{24} H + \frac{1}{3} R \right) \quad (3-25)
\end{aligned}$$

因此，由外荷载引起的拱顶弯矩可以容易得出：

$$F_M^P = F_N^P (R + H) - \frac{1}{2} q_1' R^2 - \frac{1}{2} q_2 (R + H)^2 \quad (3-26)$$

例如，图 3-10 直腿半圆拱支架，

$$R = -2\text{m}; H = 2\text{m}; \alpha_1 = 0.9722 (55.7); \alpha_2 = 0.15 (8.6^\circ)$$

由试验得知 $\frac{l_0}{F_0} = 2000$; $q_1 = 30\text{kN/m}^2$; $q_2 = 15\text{kN/m}^2$; $J_{U29} =$

$$6.12 \times 10^{-6} \text{m}^4$$

假设支架设计缩动量 100mm。

1. 由荷载 q_1 和 q_2 作用下产生的支架内力

将上式参数代入式 (3-21)、式 (3-25)、由式 (3-19) 获得拱顶轴力，并由式 (3-26) 计算出拱顶弯矩：

$$F_N^P = 44.19\text{kN}$$

$$F_M^P = -3.26\text{kN} \cdot \text{m}$$

因此，由外荷载产生的卡缆拉力：

$$\begin{aligned}
N &= \frac{\frac{q_1}{2} (R \sin \alpha_1)^2 + \frac{q_2}{2} R^2 (1 - \cos \alpha)^2 - F_M^P - F_N R (1 - \cos \alpha_1)}{R \sin \alpha_2} \\
&= 16.17\text{kN}
\end{aligned}$$

由荷载 q_1 和 q_2 作用下所产生的内力如图 3-14 所示。

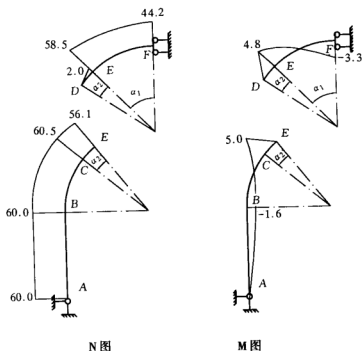


图 3-14 外荷作用产生的支架内力

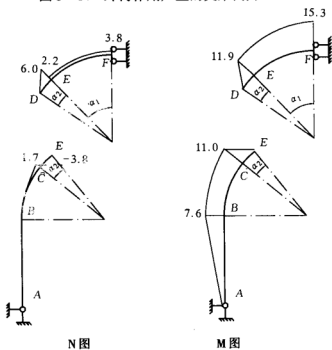


图 3-15 卡缆预应力作用产生的支架内力

2. 由卡缆预紧力产生的支架内力

由式 (3-7):

$$F_{N_0}^N = \frac{N_0 R \sin \alpha_2}{R \cos \alpha_1 + H} = 3.82 \text{ kN}$$

$$F_M^N = \frac{N_0 R \sin \alpha_2}{R \cos \alpha_1 + H} (R + H) = 15.28 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

由卡缆预紧力所产生的支架内力如图 3-15。

3. 由于支架的缩动产生的装配应力

首先计算由于支架的缩动产生的卡缆拉力, 用式 (3-14) 计算, 这里 Δ_{CD} 由式 (3-10) 和式 (3-13) 得出:

$$\Delta_{CD} = \Delta_E [\cos (\alpha_1 + \alpha_2) \sin \alpha_1 - \frac{H + R \cos (\alpha_1 + \alpha_2)}{H + R \cos \alpha_1} \sin (\alpha_1 + \alpha_2) \cos \alpha_1]$$

而 δ_{II} 由式 (3-17) 得出。

卡缆拉力求出后, 可由式 (3-17) 确定拱顶截面内力, 不

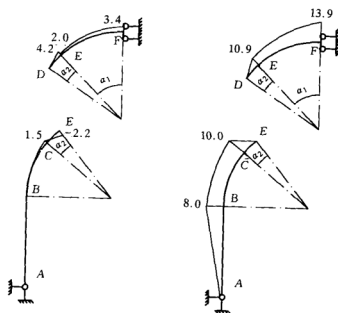


图 3-16 由于支架缩动产生的支架内力

过这时应注意,当缩动量较大时, α_1 和 α_2 之和不是等于常数。两者随缩动量的变化而变化,见图 3-16。

按上述原则计算,由于支架的缩动产生的装配应力为:

$$F_N^N = 3.48 \text{ kN}; F_M^N = 13.93 \text{ kN} \cdot \text{m}; N_1 = 28.11 \text{ kN}$$

4. 支架的总内力

由式 (3-19), 将上式三种因素所产生的内力进行迭加, 即得出支架的总内力。

$$F_N = 51.49 \text{ kN}; F_M = 25.93 \text{ kN} \cdot \text{m}; N = 84.28 \text{ kN}$$

支架总内力图如图 3-17 和表 3-1 所示。

5. 支架缩动过程中的内力变化

仍然采用上述的由于支架的缩动产生的装配应力的计算方法, 只不过这时以缩动量 Δ_E 为变量, Δ_E 从小到大变化, 可以看出各内力的变化情况, 表 3-2 是支架内力与缩动量之间的关系, 图 3-18 是支架内力与缩动量之间的变化曲线。

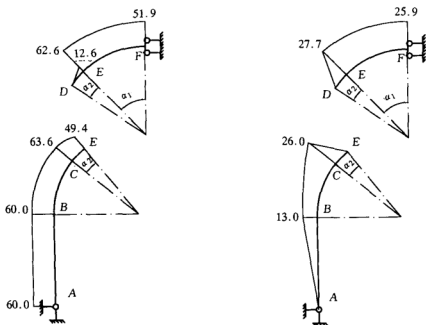


图 3-17 支架的总内力图

表 3-1 支架各节点内力

| | | 拱 脚 | | | | 拱 梁 | | |
|----------------|------------|-----|-------|-------|-------|-----|-------------|-------|
| | | A | B | C | E | D | E | F |
| 由于外荷载产生的支架内力 | N (kN) | 60 | 60 | 60.51 | 56.01 | 0 | 2.42/58.47 | 44.19 |
| | M (kN·m) | 0 | -1.63 | 5.03 | 0 | 0 | 4.83 | -3.26 |
| 由于卡缆预紧力产生的支架内力 | N | 0 | 0 | 1.65 | -3.82 | 0 | 5.97/2.15 | 3.82 |
| | M | 0 | 7.64 | 10.95 | 0 | 0 | 11.93 | 15.26 |
| 由于支架缩动产生的支架内力 | N | 0 | 0 | 1.51 | -2.24 | 0 | 4.20/1.96 | 3.43 |
| | M | 0 | 6.96 | 9.98 | 0 | 0 | 10.59 | 13.93 |
| 总内力 | N | 60 | 60 | 63.36 | 49.39 | 0 | 12.59/62.58 | 51.49 |
| | M | 0 | 12.97 | 25.96 | 0 | 0 | 27.65 | 25.93 |

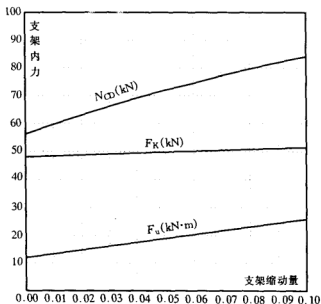


图 3-18 支架内力与缩动量关系曲线

表 3-2 支架内力与缩动量关系

| 缩动量 (m) | N_{CD} (kN) | F_N (kN) | F_M (kN·m) |
|---------|---------------|------------|--------------|
| 0 | 56.17 | 48.01 | 12.00 |
| 0.01 | 59.72 | 48.36 | 13.40 |
| 0.02 | 63.06 | 49.06 | 16.19 |
| 0.04 | 69.20 | 49.40 | 17.58 |
| 0.05 | 72.03 | 49.75 | 18.98 |
| 0.06 | 74.73 | 50.10 | 20.37 |
| 0.07 | 77.29 | 50.45 | 21.76 |
| 0.08 | 79.73 | 50.80 | 23.15 |
| 0.09 | 82.06 | 51.14 | 24.54 |
| 0.10 | 84.28 | 51.49 | 25.93 |

从上述的算例具体计算可以看出：

(1) U 型钢可缩性支架卡缆预紧力所产生的支架内力和由于支架缩动所产生的支架内力在支架的内力计算中不但是不可忽视的因素，而且往往在支架内力中占有主要地位，因此，在支架的力学分析中，必需同时考虑由于外荷载，卡缆预紧力和支架缩动所产生的支架内力。

(2) 在支架缩动变化过程中，卡缆拉力的变化最快，随着缩动量的增加卡缆拉力急剧增加，这就是卡缆容易破坏的主要原因。因此，在进行支架的设计时，不但可以考虑增加卡缆的强度，而且可以考虑适当提高卡缆的柔度（提高 l_0/F_0 之值），以达到避免卡缆的破坏而使支架失效。

(3) 采用以上所论述的计算方法，可实现对 U 型钢可缩性支架及其卡缆的强度计算和参数的确定。上述为定量地分析 U 型钢可缩性支架的力学性态提供了理论依据。同时，利用等效截面参数直杆件代替搭接部分，给予计算带来了很大的方便。

第四章 U型钢可缩性支架的 缩 动 分 析

第一节 概 述

一、围岩——支架共同作用原理

巷道稳定性问题实际上是支护结构在围岩作用下能否满足安全性和可用性要求的问题。也就是支护结构能否满足强度、刚度和稳定性要求。结构的力学计算有两类基本条件的，第一类是结构的几何尺寸与材料强度，第二类是结构所受的荷载。巷道支护结构的几何尺寸和材料强度，与一般的工程结构没有本质的区别。而支护结构所受的荷载则不同于一般工程结构所受的荷载。一般工程结构所受的荷载是给定的，而巷道支护结构所受的荷载与荷载性质有关。因此，进行支架的力学计算，不但要考虑支架本身变形特性，而且要考虑围岩的力学性质。

巷道开挖以后，围岩产生变形，围岩变形达到一定程度，巷道就要遭受破坏，即所谓的巷道“失稳”。因此在巷道开挖之后，一般都应及时地进行支护。支架架设后，围岩要产生变形，支架起到约束围岩变形的作用，这就使得围岩和支架之间产生相互作用力，支架对围岩的约束力就是围岩作用于支架上的荷载。支架所受荷载后本身也要变形，这个变形应该是与围岩的变形相协调的，也就是说当支架与围岩接触后，两者的变形应该相等。围岩与支架的相互关系作用可以用图4-1来表示。

1. 围岩变形与支架对围岩约束力的关系——围岩特性曲线
显然，支架对围岩的约束力越大，则围岩变形越小，反之，

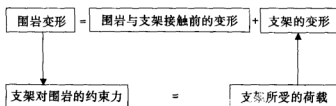


图 4-1 围岩—支架相互作用关系

支架对围岩的约束力越小，则围岩的变形就越大。例如，当围岩为理想的弹塑性体的圆形巷道，则围岩的变形与支架约束力的关系：

$$u_a = \frac{a}{2G} (p_0 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi) \sin \varphi \left[\frac{p_0 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi}{p_a + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi} (1 - \sin \varphi) \right]^{\frac{1 - \sin \varphi}{\sin \varphi}} \quad (4-1)$$

式中 u_a ——围岩的周边位移；
 a ——圆形巷道岩半径；
 p_0 ——原岩应力；
 p_a ——支架对围岩的约束力；
 G ——围岩的变形参数；
 c ——围岩的粘结力；
 φ ——围岩的内摩擦角。

这一阶段支护对围岩的约束力称为变形地压。但是，对于一些巷道的围岩不及时和密贴地支护或者支护力太小，围岩的变形就可能超过其变形极限而产生松动冒落，这时要保证巷道的稳定，支架必需有足够的强度以支撑松动围岩的重量。这时围岩作用于支架上的压力称为散体地压，在这一阶段中，如果围岩的变形越大（围岩内部的变形），则支护必需承担的散体地压就越大。围岩的变形与支架的约束力关系称为围岩的特性曲线，如图 4-2 所示。

2. 支架的变形与荷载的关系

一般的支护材料，如钢材、木材、混凝土都可以近似地作为

线弹性材料。

对普通的刚性支架，如果变形很小则支架所受的荷载与变形成正比，即支架所受的荷载越大、变形越大。而支架的变形与围岩的变形又是相适应的（相对支架架设前围岩的变形量），所以支架所受的荷载与支架本身的特性有关，如图 4-3，支架刚性太大，其达到平衡时所受的荷载越大，而这个平衡荷载往往大于支架本身的承载能力而使支架遭受破坏。另一方面，如果支架的刚度太小，往往控制不了围岩变形地压而进入散体地压阶段，这时支架所受的荷载就更大，而且由于支架变形量大，就容易发生屈服失稳而破坏，因此，选择合理的支护特性是支护成败的关键。

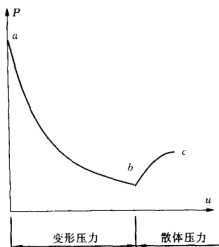


图 4-2 围岩特性曲线

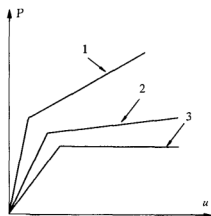


图 4-3 支架变形与荷载的关系

二、U 型钢可缩性支架的工作原理

U 型钢可缩性支架的工作特点是，当围岩作用于支架上的压力达到某一限度时（小于支架的承载能力），支架的搭接部分就产生滑动，这时相当于支架产生了较大的变形，变形的结果使得围岩作用于支架上的压力下降，而支架的仍然保持较高的承载能

力。

支架缩动量大小与围岩作用力有关,分析与实验表明,两者关系大致成线性比例关系,如图 4-4,当围岩压力达到一定值时,如果支架的缩动量的增加不需围岩压力的增加,即支架的缩动量与围岩压力无关,如图 4-4 中的 (a),这种支架称为恒阻式可缩性支架,如果随着缩动量的增大,要保持支架继续缩动,围岩作用于支架上的压力必需继续提高,这种支架称为增阻式可缩性支架。如图 4-4 中的 (b)。

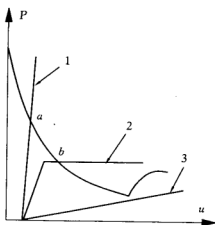


图 4-4 可缩性支架与围岩共同作用情况

因此,从围岩共同作用观点看,可缩性支架与刚性支架的基本区别,在于支护的特性曲线是否存在斜率的突变点。有的支架虽然形式上是可缩性支架,但由于参数设计不合理,支架所受的荷载大于支架本身的承载能力也不能产生缩动,导致支架失稳破坏,这种现象称为拒缩,起不到可缩性支架的应有作用。另一类支架,虽然当围岩压力达一定值时,支架产生了缩动,但是随着支架的缩动,支架的整体承载力急剧下降,支架的支撑性能恶化,当围岩压力再增大时,支架就失稳破坏,这种情况也是达不到应有的支护效果的。

U 型钢可缩性支架作为巷道的主要支护方式之一,其优点是当围岩作用于支架上的压力达到一定值时,支架产生缩动,缩动的结果使围岩的压力下降,避免围岩的压力大于支架的承载能力而破坏。因此,良好的缩动性能是 U 型钢可缩性支架能否发挥可缩性特点的关键。通过现场调查发现,U 型钢可缩性支架在实际应用中能产生有效的缩动并不多,大量的 U 型钢可缩性支架

是在缩动之前失稳和破坏，有的则是支架未承受多大的荷载就提前缩动。达不到应有的效果，因此探讨 U 型钢可缩性支架的缩动条件，对支架缩动过程中内力的变化情况进行分析，以优化设计支架形式，合理选择支护参数（如卡缆预紧力，搭接部分的位置等）对避免支架的提前缩动、拒缩和不稳定缩动，充分发挥 U 型钢可缩性支架承载能力有重要的意义。

第二节 U 型钢可缩性支架搭接部分的传力特点

U 型钢可缩性支架搭接部分一般由上型钢、下型钢和卡缆组成，而卡缆形式有多种多样，典型的双槽夹板卡缆是由上槽形板、下槽形板和螺栓组成，如图 4-5 所示。

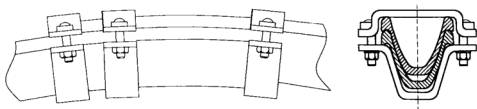


图 4-5 搭接部分结构

U 型钢可缩性支架搭接部分各构件之间的传力是比较复杂的，但它又是支架缩动的关键，因此，研究其传力特点是非常有意义的。搭接部分各构件之间的传力是空间问题，但如果将 U 型钢可缩性支架作为平面问题研究，则搭接部分各构件间的传力可分为平面外传力和平面内传力两部分。为讨论方便，这里分截面上传力和平面上传力两种情况。

一、搭接部分截面上的传力特点

目前国内生产的 U 型钢有 U 25、U 29 和 U 36 三种规格。其中，U 25 为腰定位式的，即两节 U 25 型钢搭接在一起时，其接触

部位是在 U 25 型钢横截面上的腰部，而 U 29 和 U 36 为耳定位式的。相类似地，U 型钢可缩性支架的连接件——卡缆的定位方式

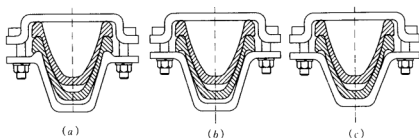


图 4-6 双槽夹板卡缆的定位方式

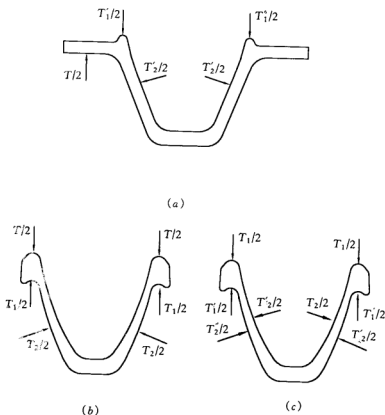


图 4-7 搭接部分 U 型钢和卡缆夹板的受力

(a) 槽形夹板的受力；(b) 上 U 型钢的受力；(c) 下 U 型钢的受力

也可分为三种,如图 4-6 所示,图中 (a) 是耳定位式卡缆,即当拧紧螺栓后,卡缆的下槽形夹板与 U 型钢横截面上的耳接触传力;图中 (b) 和 (c) 为腰定位式和腰底定位式卡缆。下面讨论 U 型钢及其卡缆是腰耳定位式样情况。

图 4-7 是腰耳定位式的 U 型钢和卡缆夹板的受力情况。

从图 4-7 看出,U 型钢与 U 型钢、卡缆夹板与 U 型钢的接触力 T 可分为两种:一种是支架平面外的接触力,即腰部接触力 T_2 ;另一部分是支架平面内的接触力,即耳部或底部接触力 T_1 ,可表示为

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= TA_0 \\ T_2 &= \frac{T}{\sin \alpha} (1 - A_0) \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

式中 α ——卡缆、U 型钢腰部斜面与对称轴之间的夹角;

A_0 ——接触分配系数,耳定位式取 $A_0 = 1$,腰定位取 $A_0 = 0$ 。

二、搭接部分平面上的受力特点

搭接部分构件之间的相互作用力是比较复杂的。假设卡缆上预先施加有预紧力 N_0 ,支架受力后,在搭接部分的两端产生了内力 M 、 Q 、 N 和 M' 、 Q' 、 N' ,如图 4-8 所示。

先证明一个结论,搭接部分受载变形后,两支 U 型钢之间不可能存在着分布的接触力。

这里仅讨论法向的接触力。至于切向的接触力存在与否完全是由法向接触力所确定的。采用反证法。如图 4-9 所示,假设搭接部分受力后两支 U 型钢之间存在着分布的接触力 $q(x)$,则



图 4-8 搭接部分
两端的受力

$$\left. \begin{aligned} M_x^{(1)} &= M + Qx + \sum_{i=1,2} N_i' < x - l_i > - \int_0^x (x-t)q(t)dt \\ &\quad - \sum_{i=1}^n R_i < x - x_i > \\ M_x^{(2)} &= \int_0^x (x-t)q(t)dt - \sum_{i=1}^n R_i < x - x_i > \\ &\quad - \sum_{i=1,2} N_i' < x - l_i > \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

The figure consists of two diagrams illustrating beam elements and segments. The top diagram shows a beam element of length dx with forces N_1 , N_2 , F , and Q , and a distributed load $q(x)$. The bottom diagram shows a beam segment of length l with forces N_1 , N_2 , and a distributed load $q(x)$.

x_i 为第 i 个集中接触力与搭接部分上端点 c 的距离 ($i=1, \dots, n$);

$$\begin{aligned} \langle x - l_i \rangle &= \begin{cases} x - l_i & \text{当 } x \geq l_i \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } x < l_i \text{ 时} \end{cases} \quad (i = 1, 2) \\ \langle x - x_i \rangle &= \begin{cases} x - x_i & \text{当 } x \geq x_i \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } x < x_i \text{ 时} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

若受载变形后两支 U 型钢之间有分布的接触力, 则两支 U 型钢之间应保持接触, 即在有分布接触力的区间内 U 型钢的曲率必需相等。而曲率 k_x 是由弯矩所确定的, 即

$$k_x^{(1)} = -\frac{M_x^{(1)}}{EI} \quad (i = 1, 2) \quad (4-4)$$

式中 EI ——U 型钢截面的抗弯刚度。

因此有: $M_x^{(1)} = M_x^{(2)} = M_x$, 代入式 (4-3) 得:

$$M_x = \frac{1}{2} (M + Q_x)$$

因而

$$q(x) = \frac{d^2 M_x}{dx^2} = 0$$

这与前面假设的有分布的接触力是相矛盾的。因此, 搭接部分受力变形后, 两支 U 型钢之间不可能存在着分布的接触力。

最近文献〔23〕证明了: 两根弹性梁有集中荷载 P 作用的区间, 至多有三个集中的接触力, 其中一个必发生在 P 作用点处 (定理 3)。根据该定理, 在图 4-10 中区间 $CDEF$ 中, E 点上有集中的接触力。因此, 搭接部分受力变形后, 两支 U 型钢之间的接触力可表示如图 4-10 所示。

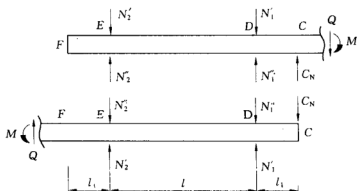


图 4-10 U 型钢之间实际接触力

为讨论方便起见，这里仅考虑搭接部分上端 c 点接触力的情况，对于下端有接触力的情况，也有相类似的讨论。

如果用 N'_1 、 N'_2 表示上、下卡缆所受的拉力（或上、下卡缆对 U 型钢的压力）， N''_1 、 N''_2 分别表示上、下卡缆处两支 U 型钢之间的接触力，若在 U 型钢可缩性支架受力之前对卡缆施加有预紧力 N_0 ，设

$$N_i = N'_i - N''_i \quad (i = 1, 2) \quad (4-5)$$

搭接部分受力变形后，如果卡缆位置上的 U 型钢之间仍然保持接触，对耳定位式的，有 $N''_i = N_0$ ($i = 1, 2$)，这时 $N_i = N_0 - N''_i$ ；如果搭接部分受力变形后，卡缆位置上的 U 型钢之间不再保持接触，这时 $N''_i = 0$ ($i = 1, 2$)，因此有 $N_i = N'_i$ ，即

$$N_i = \begin{cases} N_0 - N''_i & \text{当 } N_i \leq N_0 \text{ 时} \\ N'_i & \text{当 } N_i > N_0 \text{ 时} \end{cases} \quad (4-6)$$

三、搭接部分的传力计算

N_1 、 N_2 是卡缆对 U 型钢的压力和 U 型钢之间的接触力之差，可以由搭接部分的上端弯矩和剪力确定。图 4-11 (a) 是 N_1 、 N_2 的计算简图，取图 4-11 (b) 所示的基本静定结构，因此， N_2 可以由下式确定：

$$N_2 = \Delta_{2p} / \delta_{22} \quad (4-7)$$

式中 δ_{22} ——在基本结构中，假想在下卡缆中部切开，并作用一对单位拉力，产生的该方向上的位移；

Δ_{2p} ——基本结构中，由于搭接部分两端的内力作用产生在切口处的位移。

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\overline{M}_2^2}{EI} ds + \sum \frac{\overline{N}_2^2}{EA_0} \cdot C \quad (4-8)$$

式中 \overline{M}_2 ——在基本静定结构中，由一对单位力引起的 U 型钢截面弯矩；

\overline{N}_2 ——在基本静定结构中，由一对单位力引起的上卡缆

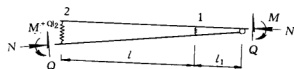
拉力与接触力之差；

EI ——单支 U 型钢的截面抗弯刚度；

EA_0 ——卡缆截面抗拉刚度；

C ——卡缆的计算长度。

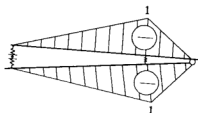
由图 4-11 可得：



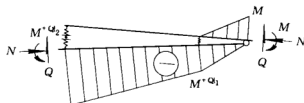
(a)



(b)



(c)



(d)

图 4-11 搭接部分的传力计算简图

$$\delta_{22} = 2l^2 l_2 / (3EI) + C (1 + l_2^2 / l_1^2) / (EA_0) \quad (4-9)$$

式中 l_1 、 l_2 ——上、下卡缆至搭接部分上端的距离；

l ——上下卡缆之间的距离， $l = l_2 - l_1$ ；

$$\Delta_{2p} = \sum \int \frac{\overline{M}_2 \overline{M}_p}{EI} dx + \frac{\overline{N}_2 \overline{N}_p}{EA} \cdot C \quad (4-10)$$

式中 \overline{M}_p ——在基本静定结构中，由于搭接部分两端的内力作用下产生的 U 型钢弯矩；

\overline{N}_p ——在基本静定结构中，由于搭接部分两端内力作用下产生的上卡缆拉力与 U 型钢接触力之差。

由图 4-11 (c) 和 (d) 可得：

$$\Delta_{2r} = l [M(l_2 + 2l) + Q(l_2 + l_2)l_2] / (6EI) + MC l_2 / (EA_0 l_1^2) \quad (4-11)$$

将式 (4-9) 和式 (4-11) 代入式 (4-7)，得

$$N_2 = \frac{[(l_2 + 2l)M + (l_1 + l_2)l_2 Q]l_1^2 l / (6EI) + l_2 MC / (EA_0)}{2l_1^2 l_2 l^2 / (3EI) + C(l_1^2 + l_2^2) / (EA_0)} \quad (4-12)$$

在图 4-11 (b) 的基本静定结构中，有： $N_1 = (M - N_2 l_2) / l_1$ ，将式 (4-12) 代入，得：

$$N_1 = \frac{[(l + l_1)M - (l_1 + l_2)l_2 Q]l_1 l_2 l / (6EI) + Cl_1 M / (EA_0)}{2l_1^2 l_2 l^2 / (3EI) + C(l_1^2 + l_2^2) / (EA_0)} \quad (4-13)$$

第三节 U 型钢可缩性支架的缩动条件

U 型钢可缩性支架的搭接部分两端内力按某种组合达到一定值时，搭接部分便产生滑动。这是判断 U 型钢可缩性支架是否缩动的根据，称 U 型钢可缩性支架的缩动准则。也是 U 型钢可缩性支架的缩动条件。

下面讨论的仅考虑耳定位式的情况，即在式 (4-2) 中 $A_0 = 1$ 。

如图 4-12 所示，假如卡缆是有限位块的情况，当搭接部分

产生滑动时，下卡缆随拱梁的下端往下滑动，而上卡端则固定在腿柱的上端。搭接部分产生滑动时，可能在 A、B、C、D、E 五处出现滑动摩擦力，其中 D、E 两处如果 U 型钢处于开启状态时，则该处的滑动摩擦力为零。当所有接触点上的滑动摩擦力之和小于轴向 N，搭接部分就产生滑动。即：

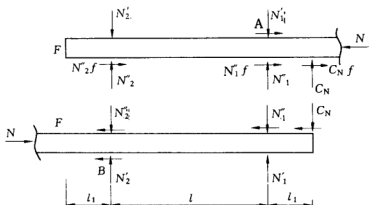


图 4-12 搭接部分的滑动接触力

$$N \geq [N'_1 + N'_2 + C_N + N'_1 + N'_2] \cdot f \quad (4-14)$$

式中 N ——搭接部分两端所受的轴向力；

f ——钢材的静摩擦系数，一般 $f=0.15 \sim 0.20$ ；

C_N ——C 点处的法向接触力，由平衡条件：

$$C_N = N_1 + N_2 + Q \quad (4-15)$$

将式 (4-15) 代入式 (4-14)，并利用式 (4-5) 得 U 型钢可缩性支架缩动条件（准则）的一般表达式为：

$$N / (2N'_1 + 2N'_2 + Q) \geq f \quad (4-16)$$

这里：

$$N'_i = \begin{cases} N_0 & \text{当 } N_i \leq N_0 \text{ 时} \\ N_i & \text{当 } N_i > N_0 \text{ 时} \end{cases} \quad (i=1, 2) \quad (4-17)$$

式 (4-16) 表明，U 型钢可缩性支架的缩动与否是由搭接

部分两端所受的轴力和剪力以及卡缆所受的拉力所确定的。而卡缆的拉力是由式 (4-17) 所确定的。下面根据式 (4-17) 的四种情况。讨论缩动准则式 (4-16) 的具体表达式。

第一种情况, 搭接部分的上下卡缆位置上的 U 型钢之间均处于开启状态, $N'_1 = 0$, $N'_2 = 0$, 即出现这种情况的条件是:

$$N_1 \geq N_0, N_2 \geq N_0 \quad (4-18)$$

即:

$$\left. \begin{aligned} \frac{[(l-l_1)M - (l_1+l_2)l_2Q]l_1l_2l/(6EI) + l_1MC/(EA_0)}{2l_1^2l_2l^2/(3EI) + (l_1^2+l_2^2)C/(EA_0)} &\geq N_0 \\ \frac{[(l_2+2l)M + (l_1+l_2)l_2Q]l_1^2l/(6EI) + l_2MC/(EA_0)}{2l_1^2l_2l^2/(3EI) + (l_1^2+l_2^2)C/(EA_0)} &\geq N_0 \end{aligned} \right\} \quad (4-19)$$

这是缩动准则式 (4-16) 中, 有: $N'_i = N_i$ ($i = 1, 2$), 因此在这种情况下下的缩动准则可表示为:

$$\frac{N}{\frac{l_1l[(l_2+2l_1)M - (l_2^2-l_1^2)l_1Q]/(3EI) + 2C(l_1+l_2)M/(EA_0)}{2l_1^2l_2l^2/(3EI) + C(l_1^2+l_2^2)/(EA_0)} + Q} \geq f \quad (4-20)$$

第二种情况, 搭接部分上卡缆处的 U 型钢之间处于接触状态, 下卡缆处的 U 型钢之间处于开启状态, $N'_1 \geq 0$, $N'_2 = 0$, 出现这种情况的条件是

$$N_1 \leq N_0, N_2 \geq N_0$$

即

$$\left. \begin{aligned} \frac{l_1l_2l[(l-l_1)M - (l_1+l_2)l_2Q]/(6EI) + Cl_1M/(EA_0)}{2l_1^2l_2l^2/(3EI) + C(l_1^2+l_2^2)/(EA_0)} &\leq N_0 \\ \frac{l_1^2l[(l_2+2l)M + (l_1+l_2)l_2Q]/(6EI) + Cl_2M/(EA_0)}{2l_1^2l_2l^2/(3EI) + C(l_1^2+l_2^2)/(EA_0)} &\geq N_0 \end{aligned} \right\} \quad (4-21)$$

这时在式 (4-16) 中, 有 $N'_1 = N_0$, $N'_2 = N_2$ 。因此在这种情况下下的缩动准则可表示为:

$$\frac{l_1^2 l [(l_2 + 2l_1)M + (l_1 + l_2)l_2 Q] / (3EI) + 2Cl_2(l_1 + l_2)M / (EA_0)}{2l_1^2 l_2 l^2 / (3EI) + C(l_1^2 + l_2^2) / (EA_0)} + 2N_0 + Q \geq f \quad (4-22)$$

第三种情况：搭接部分的上卡缆处的 U 型钢之间处于开启状态，下卡缆处的 U 型钢之间处于接触状态， $N''_1 = 0$ ， $N''_2 \leq 0$ ，出现这种情况的条件是

$$N_1 \geq N_0, \quad N_2 \leq N_0$$

即：

$$\left. \begin{aligned} \frac{l_1 l_2 l [(l - l_1)M - (l_1 + l_2)l_2 Q] / (6EI) + Cl_1 M / (EA_0)}{2l_1^2 l_2 l^2 / (3EI) + C(l_1^2 + l_2^2) / (EA_0)} &\geq N_0 \\ \frac{l_1^2 l [(l_2 + 2l_1)M + (l_1 + l_2)l_2 Q] / (6EI) + Cl_2 M / (EA_0)}{2l_1^2 l_2 l^2 / (3EI) + C(l_1^2 + l_2^2) / (EA_0)} &\leq N_0 \end{aligned} \right\} \quad (4-23)$$

这种情况下，缩动准则式 (4-16) 中，有 $N'_1 = N_1$ ， $N'_2 = N_0$ 。因此缩动准则可表示为：

$$\frac{l_1 l_2 l [(l - l_1)M - (l_1 + l_2)l_2 Q] / (3EI) + 2Cl_2 M / (EA_0)}{2l_1^2 l_2 l^2 / (3EI) + C(l_1^2 + l_2^2) / (EA_0)} \geq f \quad (4-24)$$

第四种情况：上下卡缆处的 U 型钢均处于接触状态， $N''_1 \geq 0$ ， $N''_2 \geq 0$ ，出现这种情况的条件是

$$N_1 \leq N_0, \quad N_2 \leq N_0$$

即

$$\left. \begin{aligned} \frac{l_1 l_2 l [(l - l_1)M - (l_1 + l_2)l_2 Q] / (6EI) + Cl_1 M / (EA_0)}{2l_1^2 l_2 l^2 / (3EI) + C(l_1^2 + l_2^2) / (EA_0)} &\leq N_0 \\ \frac{l_1^2 l [(l_2 + 2l_1)M + (l_1 + l_2)l_2 Q] / (6EI) + Cl_2 M / (EA_0)}{2l_1^2 l_2 l^2 / (3EI) + C(l_1^2 + l_2^2) / (EA_0)} &\leq N_0 \end{aligned} \right\} \quad (4-25)$$

在这种情况下，缩动性准则式 (4-16)，有 $N'_1 = N_0$ ， N'_2

$= N_0$ 。因此缩动准则可表示为：

$$N / (4N_0 + Q) \geq f \quad (4-26)$$

判断 U 型钢可缩性支架的缩动与否，首先根据支架的荷载计算搭接部分上端的内力 M 、 Q 和 N ，然后利用式 (4-19)、(4-21)、(4-23) 和 (4-25) 判别搭接部分上下卡缆的接触情况。相应地利用式 (4-29)、(4-22)、(4-24) 和 (4-26) 进行判断，如图 4-13 所示。

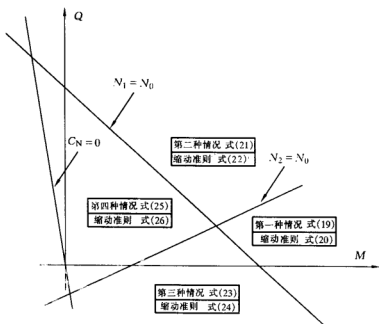


图 4-13 U 型钢可缩性支架的缩动条件

分析式 (4-19) ~ (4-26) 可以看出，当 U 型钢可缩性支架的几何尺寸确定后，支架的缩动取决于卡缆的预紧力 N_0 和搭接部分上端的内力 M 、 Q 和 N_0 ，卡缆预紧力越大， M 和 Q 值（符号见图 4-8）越大，支架越不容易缩动，而 N 值越大，支架越容易缩动。特殊地，当搭接部分的上下卡缆处的 U 型钢之间均处于接触状态时，U 型钢可缩性支架的缩动与否仅与卡缆预紧

力、搭接部分两端的轴力和剪力有关，与弯矩无关；当搭接部分的上下卡缆处的 U 型钢之间均处于开启状态时 U 型钢可缩性支架的缩动与否仅与搭接部分两端的内力有关，与卡缆的预紧力无关。但应该注意的是，搭接部分两端的内力是应满足平衡条件，并非相互独立的。

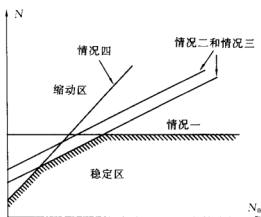


图 4-14 M 、 Q 为一定值时，缩动临界状态的轴力和预紧力的关系

图 4-14 是其他条件不变的情况下，支架处于缩动临界状态时，搭接部分上端的轴力与卡缆预紧力的关系曲线。从图中可以看出，随着卡缆预紧力的加大，起初支架的抗缩动能力有急剧地提高，当卡缆预紧力到达一定的值时，继续增加卡缆预紧力，支架的抗缩动能力的增加变缓，当卡缆预紧力增加到一定的程度，再继续

增加卡缆预紧力不能提高支架的抗缩动能力。但这种情况一般是不会出现的，尤其是上卡缆接近 C 点时候，不可能出现上、下卡缆位移同时开启的情况。

第四节 U 型钢可缩性支架的缩动分析

一、U 型钢可缩性支架的缩动准则

上一节讨论的 U 型钢可缩性支架的缩动条件是假设卡缆与 U 型钢，U 型钢与 U 型钢之间都是耳定位式的。对于更一般的情况，如腰耳定位式，卡缆与 U 型钢、U 型钢与 U 型钢之间的接触力就不单纯为平面内的接触力了。考虑图 4-5 的双槽夹板，

有上、下限位块的卡缆情况。这时上卡缆的位置基本与棚腿上端点（图 4-12 中的 C 点）重合，为方便起见，考虑更一般的情况，即下卡缆处的 U 型钢之间开启（上节的情况三）。

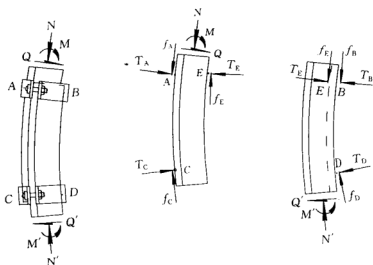


图 4-15 搭接部分滑动时的受力状况

从图 4-15 (b) 可以看出，滑动的主动力是上端 U 型钢的轴力 N ，滑动的阻力是 A, E, C 三点的法向接触力 T_A 、 T_E 和 T_C 产生的摩擦力 f_A 、 f_E 和 f_C ，考虑式 (4-2)，U 型钢可缩性支架的缩动条件为：

$$N \geq \left\{ T_A + \frac{T_D}{\sin \alpha} [1 - A_2(1 - \sin \alpha)] + \frac{T_E}{\sin \alpha} [1 - A_2(1 - \sin \alpha)] \right\} f \quad (4-27)$$

式中 A_1 ——卡缆夹板与 U 型钢的接触力分配系数；

A_2 ——U 型钢与 U 型钢的接触力分配系数；

α ——卡缆夹板、U 型钢腰部斜面与对称轴的夹角，(°)，

U₂₅ 型钢 $\alpha = 15^\circ$ ；

f ——钢材的摩擦系数，一般取 $f = 0.15 \sim 0.20$ 。

由图 4-15 (b) 建立平衡关系，可求得：

$$\left. \begin{aligned} T_A &= N_0 \\ T_C &= T_D = M/l \\ T_B &= M/l + Q + N_0 \end{aligned} \right\} \quad (4-28)$$

式中 Q ——搭接部分上端剪力, N ;

T_B, T_D —— B, D 点的法向接触力。

将上式代入式 (4-27), 即得到用搭接部分上端内力表示 U 型钢可缩性支架的缩动判据为

$$\frac{Nl \sin \alpha}{N_0 l \sin \alpha + M[1 - A_1(1 - \sin \alpha)] + [M + Ql + N_0 l][1 - A_2(1 - \sin \alpha)]} \geq f_0 \quad (4-29)$$

分析式 (4-29) 可以看出, 搭接部分上端的轴力是缩动源, 而弯矩和剪力是抗缩动源。因此, 为有效地控制支架抗缩动能力, 不但可以通过调整卡缆预紧力实现, 还可以合理地选择搭接部分的位置。当搭接部分位置选择不合理, 特别是弯矩太大时, 支架将达不到缩动条件而出现拒缩现象。从式 (4-29) 还可以看出, 在相同的条件下, 耳定位式的 U 型钢可缩性支架的抗缩动能力要比腰定位式或腰耳定位式的来得高。

二、卡缆预紧力对支架的缩动的影响

卡缆预紧力对支架的缩动有直接的影响。从式 (4-29) 可以看出, N_0 越大, 支架越不容易产生缩动。另一方面, 卡缆预紧力 N_0 要产生支架的附加内力, 这是因为在现场中架设支架时, 搭接部分不可能完全密贴, 其下端均有不同程度的张开现象, 这时安设卡缆, 并施加预紧力, 势必产生支架内力, 我们习惯将由于施加卡缆预紧力所产生的支架内力称为支架的预应力。

对于直腿半圆拱支架, 卡缆预紧力所产生的搭接部分上端 E 点的内力可由图 3-7 求得, 即

$$\left. \begin{aligned} E_{N0}^N &= -\frac{N_0 R \cos \alpha_1 \sin \alpha_2}{R \cos \alpha_1 + H} \\ E_{Q0}^N &= \frac{N_0 R \sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{R \cos \alpha_1 + H} \\ E_M^N &= N_0 R \sin \alpha_2 \end{aligned} \right\} \quad (4-30)$$

式中 E_{N0}^N 、 E_{Q0}^N 、 E_M^N ——由于卡缆预紧力 N_0 产生的搭接部分上端 E 点的轴力 (N)、剪力 (N) 和弯矩 ($N \cdot m$);

R , H ——直腿半圆拱半径和腿柱高度 (m);

α_1 , α_2 ——巷道中心线至 U 型钢搭接部分上端夹角、搭接段圆弧角 ($^\circ$)。

为了进一步定量地分析卡缆预紧力与支架抗缩动能力的关系, 考虑直腿半圆拱 U 型钢可缩性支架受均布荷载 q 作用的情况, 见图 3-6。

取拱顶弯矩为基本未知量, 有

$$F_M^P = \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} \quad (4-31)$$

式中 F_M^P ——由外荷载 P 产生的拱顶 F 点的弯矩, $N \cdot m$;

δ_{11} ——基本静定结构在 F_M^P 方向的柔度系数 ($\text{rad}/N \cdot m$);

$$\delta_{11} = \frac{R}{EJ} k \Big|_0^{\alpha_1} + \frac{R}{EJ'} k \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{R}{EJ} k \Big|_{\alpha_2 + \alpha_3}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{H^3}{3EJ};$$

Δ_{1P} ——在基本静定结构中, 外荷载 P 产生的 F_M^P 方向上的变位, rad ;

$$\Delta_{1P} = \frac{R}{EJ} k \Big|_0^{\alpha_1} + \frac{R}{EJ'} K \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{R}{EJ} K \Big|_{\alpha_1 + \alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{H^4}{24} \frac{(5R + H)}{(R + H)^2} P;$$

$$k = \left(H^2 + \frac{R^2}{2} \right) \alpha + 2HR \sin \alpha + \frac{R^2}{4} \sin 2\alpha;$$

$$K = -\frac{PH^2 R}{2(R + H)} \left[\left(H - \frac{R}{2} \right) \alpha + (R - H) \sin \alpha - \frac{R}{4} \sin 2\alpha \right].$$

在外荷载作用下的拱顶轴力为:

$$F_N^P = \frac{1}{R+H} \left[F_M^P + \frac{R^2}{2} P + \frac{(R+H)^2}{2} P \right] \quad (4-32)$$

这样可以进一步地求出由外荷载产生的 E 点内力，并与式 (4-30) 的 E 点内力叠加，得了搭接部分上端的总内力为：

$$\left. \begin{aligned} M &= F_M^P - R(1 - \cos\alpha_1)(F_M^P - PR) + N_0 R \sin\alpha_2 \\ N &= [F_N^P - PR(1 - \cos\alpha_1)] \cos\alpha_1 + PR \sin^2\alpha_1 - \frac{N_0 R \cos\alpha_1 \sin\alpha_2}{R \cos\alpha_1 + H} \\ Q &= -[F_N^P - PR(1 - \cos\alpha_1)] \sin\alpha_1 + PR \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 + \frac{N_0 R \sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{R \cos\alpha_1 + H} \end{aligned} \right\} \quad (4-33)$$

将式 (4-33) 代入式 (4-29)，并考虑支架缩动的临界状态，可以发现，在其他条件不变的情况下，支架的抗缩动能力与卡缆预紧力是呈线性关系的。

对于第三章的算例：直腿半圆拱 U 型钢可缩性支架， $R = 2\text{m}$ ， $H = 2\text{m}$ ， $\alpha_1 = 0.9722$ ， $\alpha_2 = 0.15$ ， $l_0/F_0 = 2000$ ， $J_{U29} = 6.12 \times 10^{-6}$ ， $f = 0.18$ 、 $\alpha = 15^\circ$ ，则

耳定位式 $P = 0.3656 N_0 \quad \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ ；

腰定位式 $P = 0.2504 N_0 \quad \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ 。

三、支架在缩动过程中的抗缩动能力变化

支架产生缩动后，如果外荷载很快地下降下来，则缩动就会停止。如果随时间增长，外荷载又继续增加，这时判断支架是否继续缩动，仍然可以采用式 (4-29) 的缩动判据，只不过这时应该注意两点，一是缩动的几何尺寸改变了，二是由于缩动产生了装配内力，使缩动条件产生了变化。如果缩动量不是很大，则在图 3-13 (a) 的计算简图中，可将 α_2 视为变量，而将拱梁的圆心角的一半 $\alpha_0 = \alpha_1 + \alpha_2$ 作为常量进行分析。

支架缩动时引起下卡缆的拉力 N_1 可由下式确定：

$$N_1 = \frac{\Delta \text{CD}}{\eta_{11}} \quad (4-34)$$

式中 Δ_{CD} ——无卡缆约束时，由于拱梁下沉引起搭接部分下端的张开量；

$$\Delta_{CD} = H \sin \alpha_2 \Delta_E / (H + R \cos \alpha_1)$$

η_{11} ——假想从卡缆中部切开，并作用一对单位力产生的在该方向上的位移，m/N；

Δ_E ——搭接部分的 U 型钢相对滑动能。

η_{11} 可先由图 3-12 的计算简图求出支座反力，再按图 3-13

(a) 进行计算求得，即

$$\begin{aligned} \eta_{11} &= \int_0^{\alpha_1} \frac{\overline{M}_1^2}{EJ} R d\alpha + \int_{\alpha_1}^{\alpha_1+\alpha_2} \frac{\overline{M}_2^2}{EJ} R d\alpha + \int_{\alpha_1+\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\overline{M}_3^2}{EJ} R d\alpha + \int_0^H \frac{\overline{M}_4^2}{EJ} dx \\ &= \frac{RF_x^2}{EJ} \left\{ \left(H^2 + \frac{R^2}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 \right) + 2RH[1 + \sin \alpha_1 - \sin(\alpha_1 + \alpha_2)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{R^2}{4} [\sin 2\alpha_1 - \sin 2(\alpha_1 + \alpha_2)] \right\} + \frac{RF_x^2}{EJ} \left\{ \left(H^2 + \frac{R^2}{2} \right) \alpha_2 + 2RH \right. \\ &\quad \left. \times [\sin(\alpha_1 + \alpha_2) - \sin \alpha_1] + \frac{R^2}{4} [\sin 2(\alpha_1 + \alpha_2) - \sin 2\alpha_1] \right\} \\ &\quad + \frac{F_x^2 H^3}{3EJ} \end{aligned} \quad (4-35)$$

这里

$$F_x = \frac{R \sin \alpha_2}{H + R \cos \alpha_1}$$

求出 N_1 后，可将 N_1 看作为卡缆预紧力按式 (4-30) 计算出由于支架的缩动产生的搭接部分上端 E 点的内力 E_N^N ， E_Q^N 和 E_M^N 。最后迭加到式 (4-33)，得到支架在缩动过程中的 E 点内力。从而可以看出支架在缩动过程中的内力变化。利用式 (4-29)，并考虑缩动的临界状态，最后可得出直腿半圆拱 U 型钢可缩性支架在缩动过程中抗缩动能力的变化，即要保持支架的持续缩动的时围岩作用于支架上的压力的变化。

为了说明问题，仍然取前面例子中的相同条件。图 4-16 和表 4-1 给出了按这些条件计算的 U 型钢可缩性支架的抗缩动能

力与缩动量之间的关系。从图 4-16 和表 4-1 中可以看出：直腿半圆拱 U 型钢可缩性支架在均布荷载作用下，支架的抗缩动能力与缩动量基本呈线性关系，支架的抗缩动能力是随着缩动量的增大而增大的，即支架是增阻式的。当缩动量为 100mm 时，在上述条件下，耳定位式的 U 型钢可缩性支架的抗缩能力提高了 3.5% 左右，而腰定位式的提高了 4.7% 左右。

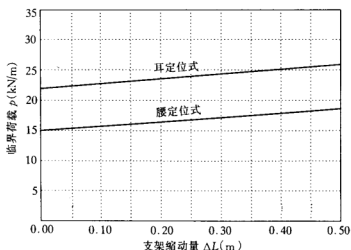


图 4-16 支架荷载与缩动量的关系

通过以上的分析我们可以看出：

(1) U 型钢可缩性支架的缩动与否可以由搭接部分两端的内力所确定，它不但与轴力有关，而且与弯矩和剪力有密切的关系。因此，进行实验研究搭接部分的缩动特性时，单纯地考虑接头的轴力对缩动的影响是没有多大意义的，必需考虑轴力、弯矩和剪力联合作用下的缩动特性。

(2) 卡缆预紧力对支架的抗缩动能力是有直接影响的。在一定条件下，通过施加不同的卡缆预紧力可以获得不同的抗缩动能力，以满足设计要求。算例表明，卡缆预紧力与支架的抗缩动能力成正比。

(3) U 型钢可缩性支架在缩动过程中内力及抗缩动能力都发

表 4-1 支架抗缩动能力与缩动量的关系

| 缩动量 (mm) | 抗缩动能力 (kN/m) | | 缩动量 (mm) | 抗缩动能力 (kN/m) | |
|-------------|--------------|-------|-------------|--------------|-------|
| | 耳定位式 | 腰定位式 | | 耳定位式 | 腰定位式 |
| 0 | 21.93 | 15.03 | 160 | 23.18 | 16.16 |
| 20 | 22.09 | 15.17 | 180 | 23.34 | 16.30 |
| 40 | 22.24 | 15.31 | 200 | 23.50 | 16.45 |
| 60 | 22.39 | 15.45 | 220 | 23.66 | 16.59 |
| 80 | 22.54 | 15.59 | 240 | 23.83 | 16.74 |
| 100 | 22.70 | 15.73 | 260 | 24.00 | 16.88 |
| 120 | 22.86 | 15.88 | 280 | 24.16 | 17.03 |
| 140 | 23.02 | 16.02 | 300 | 24.33 | 17.17 |

生了变化,拱形 U 型钢可缩性支架在缩动过程中呈现增阻特性。

(4) 以上给出的 U 型钢可缩性支架的力学分析方法和缩动判据,为定量地分析这种支架的缩动特性提供了理论依据。分析表明,利用搭接部分两端的内力作为判据条件是方便、直观的。

第五章 巷道金属支架计算的 矩阵分析方法

第一节 结构矩阵分析方法

结构矩阵分析方法是以传统的结构力学为理论基础,用矩阵作为力学参数的表达形式,借助于计算机而实现结构力学计算的方法。

传统的结构力学分析方法有力法、位移法和混合法,相对应的结构矩阵分析也有矩阵力法、矩阵位移和矩阵混合法。其中矩阵位移法由于力学概念简单,便于编写通用性较强的程序而被广泛应用,尤其是对于刚架更显示出矩阵位移法的优越性。下面介绍利用矩阵位移法求解金属支架的一般方法。

一、单元、结点的编号

结构矩阵分析方法的单元、结点编号,原则上是可以任意的,不过为了节省计算机内存,提高计算速度,使计算表达式更加规范、明了,便于修改,对单元和结点的编号应遵循某些规律。对于巷道金属支架,单元结点的编号可以按顺时针进行,如图 5-1 所示,图中单元号加圆圈表示,以便与结点号相区别。

每个结点有三个位移分量,即沿坐标轴 x 方向位移;沿 y 方向位移以及产生转角(规定顺时针为正),因此整个支架结点位移分量共有 $3n$ (n 为结点数)个,组成位移列阵:

$$\{\Delta\} = \{\{\Delta_1\}, \{\Delta_2\}, \dots, \{\Delta_n\}\}^T$$

式中 $\{\Delta_i\} = \{\Delta_{3(i-1)+1}, \Delta_{3(i-1)+2}, \Delta_{3(i-1)+3}\}^T$;

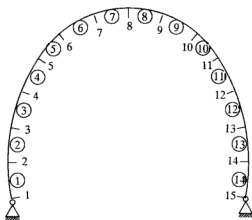


图 5-1 单元的划分

$\{\Delta_{3(i-1)+1}\}$ ——第 i 个结点沿 x 轴方向位移;

$\{\Delta_{3(i-1)+2}\}$ ——第 i 个结点沿 y 方向的位移;

$\{\Delta_{3(i-1)+3}\}$ ——第 i 个结点产生的顺时针角变位。

对于外荷载, 可以用等效的结点荷载表示, 这些结点荷载同样可以组成荷载列阵:

$$\{p\} = \{\{p_1\}, \{p_2\}, \{p_3\}, \dots, \{p_n\}\}^T$$

式中 $\{p_i\} = \{p_{3(i-1)+1}, p_{3(i-1)+2}, p_{3(i-1)+3}\}^T$;

$p_{3(i-1)+1}$ ——第 i 个结点沿 x 轴方向的荷载;

$p_{3(i-1)+2}$ ——第 i 个结点沿 y 轴方向的荷载;

$p_{3(i-1)+3}$ ——第 i 个结点的外弯矩, 顺时针为正。

二、局部坐标系下单元刚度矩阵

图 5-2 所示是在拱形金属支架中截取出来的典型单元, 设其编号为 \textcircled{i} , 取坐标系 $\bar{x}\bar{o}\bar{y}$, 使得 \bar{x} 轴与杆单元轴线重合, 该坐标系称为单元坐标系, 或称局部坐标系。

在一般情况下, 单元两端各有三个杆端力: 轴力 \bar{N} , 剪力 \bar{Q} 和弯矩 \bar{M} , 分别用 $\bar{F}_1^{\textcircled{i}}, \bar{F}_2^{\textcircled{i}}, \bar{F}_3^{\textcircled{i}}$ 和 $\bar{F}_4^{\textcircled{i}}, \bar{F}_5^{\textcircled{i}}, \bar{F}_6^{\textcircled{i}}$ 表示, 与

杆端力相对应的有六个杆端位移 $\bar{\Delta}_1^{\text{e}}$ 、 $\bar{\Delta}_2^{\text{e}}$ 、 $\bar{\Delta}_3^{\text{e}}$ 和 $\bar{\Delta}_4^{\text{e}}$ 、 $\bar{\Delta}_5^{\text{e}}$ 、 $\bar{\Delta}_6^{\text{e}}$ ，其符号规定如图 5-3 所示，因此，单元 e 两端的杆端力和杆端位移可以用矩阵形式表示。

$$\{\bar{F}\}_{6 \times 1}^{\text{e}} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \\ \bar{F}_4 \\ \bar{F}_5 \\ \bar{F}_6 \end{Bmatrix}^{\text{e}} \quad \{\bar{\Delta}\}_{6 \times 1}^{\text{e}} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \end{Bmatrix}^{\text{e}} \quad (5-1)$$

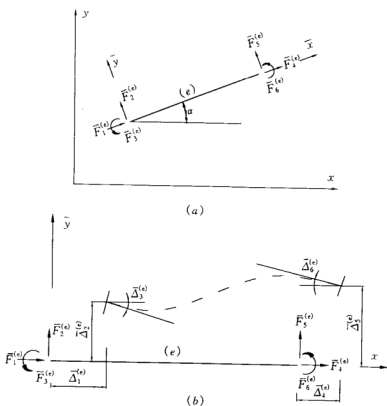


图 5-2 局部坐标系下的杆端力标端
(a) 局部坐标系下单元；(b) 杆端力和标端位移

将单元③的每个杆端力用六个杆端位移来表示，得到六个代数方程，称为单元③的刚度方程，也就是所谓的广义转角位移方程。图 5-3 表示六个单位杆端位移单独作用所引起的杆端力，利用迭加原理，不难写出单元③的刚度方程：

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_1 &= \frac{EA}{l} \bar{\Delta}_1 - \frac{EA}{l} \bar{\Delta}_4 \\ \bar{F}_2 &= \frac{12EI}{l^3} \bar{\Delta}_2 - \frac{6EI}{l^2} \bar{\Delta}_3 - \frac{12EI}{l^3} \bar{\Delta}_5 + \frac{6EI}{l^2} \bar{\Delta}_6 \\ \bar{F}_3 &= -\frac{6EI}{l^2} \bar{\Delta}_2 + \frac{4EI}{l} \bar{\Delta}_3 + \frac{6EI}{l^2} \bar{\Delta}_5 + \frac{2EI}{l^2} \bar{\Delta}_6 \\ \bar{F}_4 &= -\frac{EA}{l} \bar{\Delta}_1 + \frac{EA}{l} \bar{\Delta}_4 \\ \bar{F}_5 &= -\frac{12EI}{l^3} \bar{\Delta}_2 + \frac{6EI}{l^2} \bar{\Delta}_3 + \frac{12EI}{l^3} \bar{\Delta}_5 + \frac{6EI}{l^2} \bar{\Delta}_6 \\ \bar{F}_6 &= -\frac{6EI}{l^2} \bar{\Delta}_2 + \frac{2EI}{l} \bar{\Delta}_3 + \frac{6EI}{l^2} \bar{\Delta}_5 + \frac{4EI}{l^2} \bar{\Delta}_6 \end{aligned} \right\} \quad (5-2)$$

上式可用矩阵方程表示：

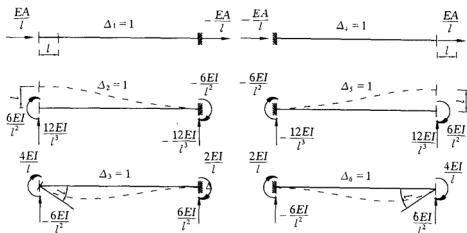


图 5-3 单位杆端位移产生的杆力

$$\{\bar{F}\}_{6 \times 1}^{(e)} = [\bar{k}]_{6 \times 6}^e \{\bar{\Delta}\}_{6 \times 1}^e \quad (5-3)$$

式中

$$[\bar{k}]^e =$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & \vdots & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \vdots & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & \vdots & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \\ \hdashline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \vdots & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \vdots & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & \vdots & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{array} \right\}$$

(5-4)

式(5-2)和式(5-3)称单元刚度方程,其中 $[\bar{k}]^e$ 称局部坐标系中的单元刚度矩阵。单元刚度矩阵是一个对称矩阵,即 $[\bar{k}]_{ij} = [\bar{k}]_{ji}$ 且对角线上的元素 k_{ij}^e 恒为正值。此外,单元刚度矩阵又是一个奇异矩阵,即其行列式的值为零。不准证实,将 $[\bar{k}]^e$ 中的第一行与第四行的对应元素相加,所得的行元素为零,故 $[\bar{k}]^e$ 矩阵行列式为零,因此矩阵 $[\bar{k}]^e$ 不能求逆。

三、整体坐标系中的单元刚度矩阵

上面建立了局部坐标系中的单元刚度矩阵,每一杆件单元都有自己的一个局部坐标系,而各单元的局部坐标系是不相同的。因此,在建立结构刚度方程之前,必需将局部坐标系单元刚度矩阵变换成结构统一的坐标中,称整体坐标系下的单元刚度矩阵。在整体坐标系中单元的杆端力和杆端位移矩阵分别为:

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix}^e \quad \{\Delta\}^e = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix}^e$$

整体坐标系中的单元刚度方程为：

$$\{F\}^e = [k]^e \{\Delta\}^e \quad (5-5)$$

式中 $[k]^e$ ——整体坐标系中单元刚度矩阵，可以由局部坐标系中单元刚度矩阵变换获取，如图 5-4 所示，有

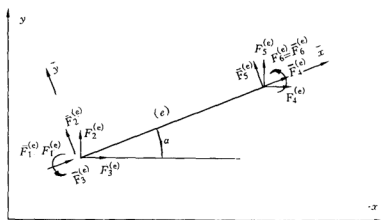


图 5-4 坐标变换

$$\begin{aligned} \overline{F}_1^{(e)} &= \overline{F}_1^{(e)} \cos \alpha + \overline{F}_2^{(e)} \sin \alpha \\ \overline{F}_2^{(e)} &= -\overline{F}_1^{(e)} \sin \alpha + \overline{F}_2^{(e)} \cos \alpha \\ \overline{F}_3^{(e)} &= \overline{F}_3^{(e)} \\ \overline{F}_4^{(e)} &= \overline{F}_4^{(e)} \cos \alpha + \overline{F}_5^{(e)} \sin \alpha \\ \overline{F}_5^{(e)} &= -\overline{F}_4^{(e)} \sin \alpha + \overline{F}_5^{(e)} \cos \alpha \\ \overline{F}_6^{(e)} &= \overline{F}_6^{(e)} \end{aligned}$$

式中 α ——局部坐标与整体坐标之间的夹角，规定以局部坐标逆时针转到整体坐标时， α 为正值。

将式 (5-5) 写成矩阵形式

$$\{\bar{F}\} = [T] \{F\}^e \quad (5-6)$$

式中 $[T]$ ——单元 e 的坐标变换矩阵，

$$[T] = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad (5-7)$$

同理单元 e 在两种坐标系中杆端位移的变换关系也有：

$$\{\bar{\Delta}\}^e = [T] \{\Delta\}^e \quad (5-8)$$

可以证明，单元坐标变换矩阵 $[T]$ 为一正交矩阵，它的逆阵等于它的转置矩阵。即

$$[T]^{-1} = [T]^T \quad (5-9)$$

因此

$$\begin{aligned} \{F\}^e &= [T]^T \{\bar{F}\}^e \\ \{\Delta\}^e &= [T]^T \{\bar{\Delta}\}^e \end{aligned} \quad (5-10)$$

将式 (5-6) 和式 (5-8) 代入式 (5-2) 得

$$\{F\}^e = [T]^T [\bar{K}]^e [T] \{\Delta\}^e \quad (5-11)$$

比较式 (5-5) 和式 (5-8) 得

$$[k]^e = [T]^T [\bar{K}]^e [T] \quad (5-12)$$

由此可见，整体坐标系中单元刚度矩阵为 6×6 的对称矩阵。

将式 (5-5) 等成分块矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} \{F_i\}^e \\ \vdots \\ \{F_j\}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{ii}^{(e)} & \vdots & K_{ij}^{(e)} \\ \dots\dots\dots & & \\ K_{ji}^{(e)} & \vdots & K_{jj}^{(e)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta_i\}^{(e)} \\ \vdots \\ \{\Delta_j\}^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (5-13)$$

这里下标 i 表示单元 e 的始端, 下标 j 表示单元 e 的末端, $i, j=1, 2, 3$ 分别表示, x 方向 y 方向和旋转方向。

四、结构刚度方程和结构刚度矩阵

结构刚度方程, 是位移法基本方程, 它表示在整体坐标系中未知的结点位移和已知的结点荷载两者关系的代数方程:

$$\{k\} \{\Delta\} = \{P\} \quad (5-14)$$

式中 $\{\Delta\}$ 和 $\{P\}$ ——结点位移列阵和结点荷载列阵。

$$[K] = \begin{Bmatrix} K_{11} & K_{21} & \cdots & K_{1m} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{m1} & K_{m2} & \cdots & K_{mm} \end{Bmatrix} \quad (5-15)$$

$[K]$ 称为结构刚度矩阵, 假如支架结点数为 N , 则 $m = 3N$ 。

根据平衡条件, 同一结点上各单元的杆端力的代数和应等于作用于该结点的外荷载:

$$\{P_i\} = \{F_i\}^m + \{F_i\}^n \quad (5-16)$$

式中 m, n ——组成结点 i 的两个单元编号。

同理, 根据变形协调条件, 同一结点上各单元在该结点的一端位移相等:

$$\{\Delta_i\} = \{\Delta_i\}^m = \{\Delta_i\}^n \quad (5-17)$$

展开式 (5-13) 并与式 (5-17) 代入式 (5-16), 得:

$$\begin{aligned} \{p_i\} &= [k_{ij}]^m \{\Delta_i\} + [k_{ji}]^m \{\Delta_j\} + [k_{ij}]^n \{\Delta_j\} + [k_{jk}]^n \{\Delta_k\} \\ &= [k_{ii}]^m \{\Delta_i\} + ([k_{jj}]^m + [k_{jj}]^n) \{\Delta_j\} + [k_{jk}]^n \{\Delta_k\} \end{aligned}$$

写成矩阵形式

$$\{P\} = [k] \{\Delta\} \quad (5-18)$$

式中

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}]^1 & [K_{12}]^1 & & & 0 \\ [K_{21}]^1 & ([K_{22}]^1 + [K_{22}]^2) & [K_{23}]^2 & & \\ & [K_{32}]^2 & ([K_{33}]^2 + [K_{33}]^3) & [K_{34}]^3 & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & [K_{mm-1}]^{m-1} & ([K_{mm}]^{m-1} + [K_{mm}]^m) \end{bmatrix} \quad (5-19)$$

这就是支架的结构刚度矩阵。

五、非结点荷载的处理

用矩阵位移法分析结构，结构如果所受的荷载不是作用在结点上，则应先将它们化为等效的结点荷载。等效结点荷载的确定原则是要求结构的实际荷载与等效结点荷载应产生相同的结点约束力，也就是说原来荷载在基本体系中引起的结点约束力记为 $\{F_p\}$ ，则等效的结点荷载 $\{P\}$ 在基本体系中引起的结点约束力也应为 $\{F_p\}$ ，由此可得：

$$\{P\} = -\{F_p\} \quad (5-20)$$

具体做法是：

(1) 求局部坐标系中单元等效结点荷载：

在局部坐标系中，在单元两端加六个附加约束，因端约束力与 $\{F\}^e$ 反号，故

$$\{\bar{P}\}^e = -\{\bar{F}_p\}^e \quad (5-21)$$

(2) 求整体坐标系下单元结点荷载：

在整体坐标系中，由坐标转换公式得

$$\{P\}^e = [T]^T \{\bar{P}\}^e \quad (5-22)$$

(3) 求整体结构的等效结点荷载 $\{P\}$ ：

依次将每个 $\{p\}$ 元素在 $\{P\}$ 中进行定位叠加即可。

六、用矩阵位移法计算金属支架的步骤

用矩阵位移法计算金属支架的步骤如下：

- (1) 整理原始数据, 对整个支架的单元进行编号;
- (2) 形成局部坐标系中的单元刚度矩阵 $[\bar{K}]^e$;
- (3) 形成整体坐标系中的单元刚度矩阵 $[K]^e$;
- (4) 形成整体结构刚度矩阵 $[K]$;
- (5) 形成整体结构的等效结点荷载矩阵 $\{P\}$;
- (6) 解方程 $[K]\{\Delta\} = \{P\}$ 求出位移 $\{\Delta\}$;
- (7) 求支架杆端内力。

七、应用实例

第二章已经介绍, 金属支架的荷载的确定, 可以采用量测金属支架的相对位移来反算支架所受的荷载。下面介绍利用上述所建立起来的结构刚度方程确定支架荷载方法。

(一) 量测方案

考虑刚性金属支架或可缩性金属支架缩动前的情况, 首先在金属支架内侧布置若干测点。图 5-5 (a) 为球铰测点的布置方案。为了提高精度, 两测点之间的距离不宜太大, 支架安设后, 利用巷道内空收敛量测的收敛计量测一次测点间的距离, 某两测点之间的连线称为测线。量测时不一定每两个测点都进行量测, 图 5-5 (b) 为测线的选取方案。根据几何关系及优化的方法, 可以得出各测点的坐标值, 并导出各测点对应的支架截面轴心

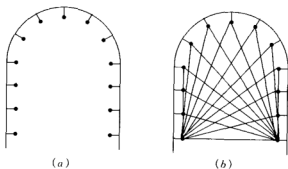


图 5-5 测点与测线的布置

(a) 测点的布置; (b) 测线的布置

坐标值。以支架截面轴心坐标值为节点，将支架离散化为一些能承受弯矩和轴力的直杆所组成的折线形杆件体系，建立起支架的结构刚度矩阵并求其逆阵，经过一段时间后（估计荷载变化稳定后），再量测一次测点的相对距离。用同样的方法可获得支架受载产生位移后的各节点新的坐标值。与第一次量测值相比较，即得由于支架荷载产生的水平位移和垂直位移。但这时的节点转角是无法量测的，可以利用外荷载的弯矩分量为零的条件及其几何关系，代入刚度方程求得节点的转角，从而获得支架的节点位移列阵。在确定支架荷载时，首先假定一种荷载分布形式（如均布荷载、线性分布荷载等），采用优化的方法，求出作用在支架上荷载的分布。

应用位移反分析方法确定支架的荷载，采用的量测工具只有收敛计，测点可以预先在地面焊接固定，也可使支架架设完毕再用环氧树脂粘合剂将预先加工好的测点固定在支架的内侧。这种方法简便易行，而且不需设置特殊的支架，量测地点可灵活选取，为支架荷载的确定带来极大的方便。

（二）单元节点坐标的计算

为方便起见，节点坐标系采用 oxy ，测点坐标系采用 $o'x'y$ ，如图 5-5 (a) 所示。首先应求测点坐标。假设预先布置有 m 个测点，除去支架本身的三个自由度外，共有 $2m-3$ 个未知量。因此用以量测测点相对距离的测线布置必须满足 $n \geq 2m-3$ 的要求，且过每个测点的测线不少于两条，才能确定所有测点的坐标值，下面分别讨论 $n=2m-3$ 和 $n>2m-3$ 两种情况的测点坐标的确定方法。

(1) 当测线取 $n=2m-3$ 时，未知量总数与能建立起的独立方程总数相等，可求得唯一解。为简便起见，测线的布置采用以第 1、 m 点为基点向各测点辐射的布置方式，如图 5-5 (b) 所示。设第 1 点与第 i 点的相对距离为 l_{1i} ，同样第 m 点与第 i 点为 l_{mi} ，第 i 点的坐标为：

$$x'_i = l_{1i} \cos \alpha_i \quad (5-23)$$

$$y'_i = l'_{li} \sin \alpha_i \quad (5-24)$$

$$\text{式中 } \cos \alpha_i = \frac{1}{2l'_{li} \cdot l_{mi}} (l_{lm}^2 + l_{li}^2 - l_{mi}^2);$$

$$\sin \alpha_i = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_i}$$

(2) 当测线取 $n > 2m - 3$ 时, 未知量总数少于能建立起的方程总数。用 l_{ij} 表示第 i 点与第 j 点的相对距离, 有:

$$(x'_i - x'_j)^2 + (y'_i - y'_j)^2 = l_{ij}^2$$

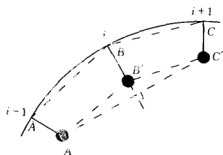
总共有 n 个方程。为求解, 建立如下的目标函数:

$$F = \sum_b [(x'_i - x'_j)^2 + (y'_i - y'_j)^2]$$

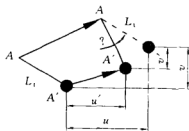
上式是一平方和形式的函数极小值问题, 可选择适当的最优化方法求解, 从而得出各测点的坐标值。这种方法的优点是可减少量测引起的误差, 在实践中必须优先采用。

节点坐标是指支架未受载时的截面形心位置。在布置测点时, 可考虑各测点间的距离基本相等, 假设 A' 、 B' 、 C' 为相邻的三个测点, 相应地 A 、 B 和 C 则是相对应的节点, 如图 5-6 (a) 所示。直线 $A'C'$ 的斜率为:

$$K_i = \frac{y'_{i+1} - y'_{i-1}}{x'_{i+1} - x'_{i-1}}$$



(a)



(b)

图 5-6 节点与测点的关系

(a) 节点与测点间的关系; (b) 节点与测点的位移

则 BB' 的斜率为:

$$\begin{aligned} T_i &= -\frac{x'_{i+1} - x'_{i-1}}{y'_{i+1} - y'_{i-1}} \\ &= \frac{y_i - y'_i}{x_i - x'_i} \end{aligned}$$

即
$$x_i - x'_i = \frac{1}{T_i} (y_i - y'_i)$$

又设测点到节点的距离为 L_t , 有

$$(x_i - x'_i)^2 + (y_i - y'_i)^2 = L_t^2$$

上两式联立解得:

$$y_i = \frac{L_t}{\sqrt{1 + 1/T_i^2}} + y'_i$$

$$x_i = \frac{1}{T_i} (y_i - y'_i) + x'_i$$

(三) 节点位移和外荷载的求解

测点的水平位移 u' 和垂直位移 v' 可以直接通过前后两次测点坐标获得

$$\left. \begin{aligned} u'_i &= x_i'^{(2)} - x_i'^{(1)} \\ v'_i &= y_i'^{(2)} - y_i'^{(1)} \end{aligned} \right\}$$

而节点的位移和转角是不能直接得到的, 图 5-6 (b) 表示节点位移和测点位移的几何关系:

$$\begin{aligned} u_i &= u'_i + L_t(\cos\beta_i - \cos\beta'_i) \\ &\approx u'_i + L_t\sin\beta_i\theta_i \\ &= u'_i + (y_i - y_i'^{(1)})\theta_i \\ &= u'_i + A_i\theta_i \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} v_i &= u'_i - (x_i - x_i'^{(1)})\theta_i \\ &= u'_i + B_i\theta_i \end{aligned}$$

式中 $A_i = Y_i - Y_i'^{(1)}$

$$B_i = -(x_i - x_i'^{(1)})$$

因此结构刚度方程可写为

$$\{P\} = [K]\{\Delta\}$$

式中 $\{P\} = \{P_{1x}, P_{1y}, P_{1m}, P_{2x}, P_{2y}, P_{2m} \dots\}^T$;

$$\{\Delta\} = \{u_1' + A_1\theta_1, V_1' + B_1\theta_1, \theta_1, u_2' + A_2\theta_2, V_2' + B_2\theta_2, \\ + \theta_2 \dots\}^T。$$

由于支架所需的外荷载只有水平力和垂直力，而不可能有弯矩，即外荷载的弯矩为零，因此刚度方程可写为

$$\begin{Bmatrix} P_\alpha \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\alpha\alpha} & k_{\alpha\beta} \\ \dots & \dots \\ k_{\beta\alpha} & k_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_\alpha \\ \dots \\ \Delta_\beta \end{Bmatrix}$$

因此有

$$\{o\} = [k_{\beta\alpha}]\{\Delta_\alpha\} + [k_{\beta\beta}]\{\Delta_\beta\}$$

解上式可获得完整的节点位移矩阵。

假设支架所受的外载是由一组相互垂直不等压力组成，外荷载参数有 P_1 、 P_2 和 φ ，可用优化方法求得。

首先，设初值 P_1^0 、 P_2^0 和 φ^0 ，这样可求得在这种荷载作用下各节点的荷载。

节点 i 的水平荷载为

$$P_{iH}^0 = \frac{1}{2} P_2^0 \sin \varphi^0 (l_{i-1} \cos \omega_{i-1} + l_i \cos \omega_i) \\ + \frac{1}{2} P_1^0 \cos \varphi^0 (l_{i-1} \sin \omega_{i-1} + l_i \sin \omega_i)$$

$$F_x = -\frac{1}{2} P_2 l \cos \theta \sin \varphi - \frac{1}{2} P_1 l \sin \theta \cos \varphi$$

$$F_y = \frac{1}{2} P_2 l \cos \theta \cos \varphi - \frac{1}{2} P_1 l \sin \theta \sin \varphi$$

节点 i 的垂直荷载为

$$P_{iV}^0 = -\frac{1}{2} P_2^0 \cos \varphi^0 (l_{i-1} \cos \omega_{i-1} + l_i \cos \omega_i) \\ + \frac{1}{2} P_1^0 \sin \varphi^0 (l_{i-1} \sin \omega_{i-1} + l_i \sin \omega_i)$$

式中 l_i —— i 号单元杆长；

ω_i —— i 号单元倾角。

这样与节点外弯距为零组成外荷载矩阵 $\{P^0\}$ ，乘上柔度矩阵 $[K]^{-1}$ 即得位移初值矩阵 $\{\Delta^0\}$ 。建立目标函数：

$$F = \sum_{i=1}^n \{[u_i - u_i^0]^2 + [v_i - v_i^0]^2\}$$

然后利用优化的方法，寻求使得 F 值最小的 P_1 、 P_2 和 φ 值，便得到本问题的解。

(四) 算例

为验证本文所论述方法的正确性，选取《巷道金属支架》一书中第七章第二节的巷道直腿三心拱支架的正算（已知荷载求位移）算例为例，以其所得位移结果作为基本条件，反求荷载值。

首先由杆长及杆件角度确定节点的测点坐标值，并求出各测点的相对距离，即相当于收敛计在架未受载时所得读数。然后根据 $u_i V_i$ 及外载弯距为零的条件，由刚度矩阵求出节点的转角，从而得到支架受压后测点坐标以及各测点的相对距离，亦即支架受压后用收敛计所量测的读数。最后采用本文所论述的方法，得出结果为

$$P_1 = 104.9384 \text{ kN/m}$$

$$P_2 = 95.67912 \text{ kN/m}$$

$$\varphi = 0.4135802$$

其结果基本与算例的中的已知条件（10t/m）一致。

第二节 考虑弹性抗力的圆弧梁单元

巷道金属支架由于自身的几何形状复杂，所受的荷载分布又不规则，无论在强度计算或者力学分析时，往往必需采用矩阵分析方法。在前面的计算和分析中，一般都将金属支架的拱部、曲腿以及底拱这些曲线形杆件近似地用直线杆单元来代替。这样的分析方法在几何上作了一定的简化。下面根据巷道金属支架的几何形状及其受力特点，假设围岩为满足 Winkler 弹性地基模型，

利用圆弧梁理论中的弯矩位移方程, 给出了拱形金属支架圆弧梁单元位移的基本微分方程, 并由此得出圆弧梁单元的刚度方程和单元刚度矩阵, 为更精确地分析巷道金属支架提供依据。

一、单元位移的基本微分方程

拱形金属支架由于加工上的方便, 一般都是由圆弧段和直线段组成, 因此可将整个支架划分为若干个圆弧形单元 (直线段为圆弧形的特殊情况), 并将单元所受的荷载转置为节点集中荷载。图 5-7 是取圆弧梁单元中的一个微段的受力情况。图中 N 、 Q 和 M 分别为轴力、剪力和弯矩, q 为围岩弹性抗力分布。分别考虑微段的法向, 切向和力矩平衡条件, 并略去高阶微量后, 可得:

$$\left. \begin{aligned} dQ - Nd\varphi - qRd\varphi &= 0 \\ Qd\varphi + dN &= 0 \\ dM - QRd\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-25)$$

上式消 Q 和 N 后, 即得到考虑围岩弹性抗力的圆弧梁单元的弯矩方程:

$$\frac{d^3 M}{d\varphi^3} + \frac{dM}{d\varphi} + R^2 \frac{dq}{d\varphi} = 0 \quad (5-26)$$

其次, 根据圆弧梁理论的弯矩—位移方程:

$$M = \frac{EI}{R^2} \left(\frac{d^2 v}{d\varphi^2} - \frac{du}{d\varphi} \right) \quad (5-27)$$

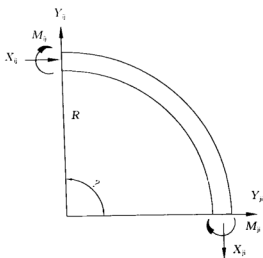


图 5-7 圆弧梁单元受力

式中 u 、 v ——切向、径向位移。

假设围岩为满足 Winkler 假定的弹性地基模型，即

$$q = kv \quad (5-28)$$

式中 k ——围岩弹性抗力系数。

将式 (5-27) 和式 (5-28) 代入式 (5-26) 得：

$$\frac{d^5 v}{d\varphi^5} + \frac{d^3 v}{d\varphi^3} + \frac{r^4 k dv}{E l d\varphi} - \frac{d^4 u}{d\varphi^4} - \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = 0 \quad (5-29)$$

由于切向应变 ε_θ 很小，可以忽略不计，即

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \left(\frac{du}{d\varphi} + v \right) = 0 \quad (5-30)$$

得

$$v = - \frac{du}{d\varphi}$$

代入式 (5-29)，最后得圆弧梁单元任意一点的位移 u 的基本微分方程：

$$\frac{d^6 u}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\varphi^4} + \left(1 + \frac{R^4 k}{EI} \right) \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = 0 \quad (5-31)$$

二、单元上任意一点的内力和位移

式 (5-31) 是六阶线性常系数齐次微分方程，其通解为

$$u = c_1 + c_2 \varphi + c_3 e^{a\varphi} \cos b\varphi + c_4 e^{a\varphi} \sin b\varphi + c_5 e^{-a\varphi} \cos b\varphi + c_6 e^{-a\varphi} \sin b\varphi \quad (5-32)$$

式中 c_1 、 c_2 …… c_6 ——由圆弧梁两端边界所确定的积分常数

$$\left. \begin{aligned} a &= \left[\frac{1}{2} (1 + \alpha + \sqrt{1 + \alpha}) \right]^{\frac{1}{2}} \\ b &= \left[\frac{1}{2} (1 + \alpha - \sqrt{1 + \alpha}) \right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (5-33)$$

$$\alpha = \frac{R^4 k}{EI} \quad (5-34)$$

为简单起见，将式 (5-32) 写成矩阵形式

$$U = [L] [C] \quad (5-35)$$

式中 $[C]$ ——积分常数矩阵；

$$[C] = [c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6]^T;$$

$$[L] = [1, \varphi, e^{a\varphi} \cos b\varphi, e^{a\varphi} \sin b\varphi, e^{-a\varphi} \cos b\varphi, e^{-a\varphi} \sin b\varphi]。$$

定义微分演算矩阵

$$[\nabla] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & -a \end{bmatrix}$$

则有

$$\frac{d^n u}{dp^n} = [L][\nabla]^n [C] \quad (5-36)$$

将式(5-36)代入式(5-27)、式(5-25)和式(5-30)即可得到圆弧梁单元中任一点内力 $\{\bar{N}\}$ 和位移 $\{\bar{u}\}$ ：

$$\{\bar{N}\} = \begin{Bmatrix} \bar{N} \\ \bar{Q} \\ \bar{M} \end{Bmatrix} = -\frac{EI}{R^3} \begin{bmatrix} -[L][\nabla]^5 + [\nabla]^3 + a[\nabla][C] \\ [L][\nabla]^4 + [\nabla]^2[C] \\ R[L][\nabla]^3 + [\nabla][C] \end{bmatrix} \quad (5-37)$$

$$\{\bar{u}\} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\omega} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [L][C] \\ -[L][\nabla][C] \\ -\frac{1}{R}[L][\nabla]^2 + [C] \end{bmatrix} \quad (5-38)$$

三、单元刚度方程及刚度矩阵

设单元的杆端力 $\{F\}^e$ 和单元的杆端位移 $\{\Delta\}^e$ 如图5-2b所示。将图5-2b和图5-7相比较,并利用式(5-37)和式(5-38)在单元的*i*端,取 $\varphi=0$,在单元的*j*端,取 $\varphi=\bar{\varphi}$,这里 $\bar{\varphi}$ 为圆弧梁单元的圆心角。这样,即可得到单元的杆端力和杆端位移。

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ m_{ij} \\ x_{ji} \\ y_{ji} \\ m_{ji} \end{Bmatrix} = -\frac{EI}{R^3} \begin{bmatrix} [L(0)][(\nabla)^5 + (\nabla)^3 + \alpha(\nabla)] \\ [L(0)][(\nabla)^4 + (\nabla)^2] \\ R[L(0)][(\nabla)^3 + (\nabla)] \\ [L(\bar{\varphi})][(\nabla)^5 + (\nabla)^3 + \alpha(\nabla)] \\ [L(\bar{\varphi})][(\nabla)^4 + (\nabla)^2] \\ R[L(\bar{\varphi})][(\nabla)^3 + (\nabla)] \end{bmatrix} [C]$$

$$= [K^F]^e [C] \quad (5-39)$$

$$\{\Delta\}^e = \begin{Bmatrix} \Delta_i \\ \Delta_j \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_j \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [L(0)] \\ -[L(0)][\nabla] \\ -\frac{1}{R}[L(0)][\nabla]^2 \\ [L(\bar{\varphi})] \\ [L(\bar{\varphi})][\nabla] \\ -\frac{1}{R}[L(\bar{\varphi})][\nabla]^2 \end{bmatrix} [C]$$

$$= [K^\Delta]^e [C] \quad (5-40)$$

从式(5-39)和式(5-40)中消去积分常数矩阵 $[C]$ 得

$$\{F\}^e = [K]^e \{\Delta\}^e \quad (5-41)$$

$$[K]^e = [K^F]^e ([K^\Delta]^e)^{-1} \quad (5-42)$$

式中 $[K]^e$ ——局部坐标系下的单元刚度矩阵。

式(5-41)就是局部坐标系下圆弧梁单元的刚度方程，因此，整体坐标系下的刚度方程为

$$\{\bar{F}\}^e = [\bar{K}]^e \{\bar{\Delta}\}^e \quad (5-43)$$

式中 $[\bar{K}]^e$ ——整体坐标下单元刚度矩阵，

$$[\bar{K}]^e = ([\bar{T}]^e)^T [K]^e [\bar{T}]^e \quad (5-44)$$

$[\bar{T}]^e$ ——单元 e 的坐标转换矩阵，见式(5-7)。

第三节 巷道金属支架的弹塑性分析

前面所讨论的都是基于弹性状态分析巷道金属支架在外荷载作用下产生的变形、缩动及破坏,实际上,巷道金属支架在破坏之前,应经历弹塑性变形,而且支架进入弹塑性变形阶段,支架的变形加大了,其支架内力及其支架所受的外荷载都要产生较大的变化。实际上,作为巷道支架,应允许产生一定的变形,支架进入弹塑性变形阶段,并不影响支架的正常使用。因此在进行支架的承载能力计算时,有必要考虑支架弹塑性应力状态。其次,金属支架所受的荷载往往比较复杂而难于确定,通过对支架的位移量测,反算支架所受的荷载,是一种有效的途径。如果将支架的反算局限在弹性范围内,当荷载比较大时,支架可能部分进入弹塑性变形阶段,这样反算结果与实际情况不符,因此对巷道金属支架进行弹塑性分析是非常必要的。

下面我们讨论巷道金属支架进入弹塑性应力状态后的力学行为。为了简化计算,我们仍然采用以下的一般假设:

(1) 忽略剪力 Q 的影响,前面已经说明,剪切变形对支架影响很小,弹性状态是这样,在弹塑性状态也是如此。

(2) 假设材料的理想的弹塑性体,这对于大部分的金属材料是合理的。

(3) 杆件变形时其截面上的变形和与中性轴距离成正比(平截面假设)。

(4) 材料的拉压具有同样的应力应变曲线。

(5) 变形是微小的(小变形假设)。

金属支架结构的截面上,在外力作用下,随着应力的增大,经历弹性阶段、弹塑性阶段和完全塑性阶段等三个阶段。根据平截面假设,这三个阶段在截面上的正应力分布如图 5-8 所示。当截面应力状态进入第三阶段(图 5-8)时,应力达到最大值,根据理想弹塑性材料假设,这时变形是任意的;截面上的这种状

态就是截面的屈服状态，在整个支架结构中，该截面可以产生转动，因此习惯将这种截面称为“塑性铰”。只不过所谓的塑性铰与普通结构的铰链连接有两点不同：

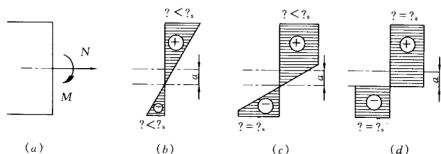


图 5-8 梁截面上的正应力

(a) 截面上的内力；(b) 弹性；(c) 弹塑性；(d) 完全塑性

(1) 通常的铰是不能承受弯矩的，而塑性铰存在的条件应恒有 $\{M\} = M_p$ 的弯矩。

(2) 通常铰的两侧的构件可在两个方向上产生相对转动，而塑性铰作反方向的相对转动对应于卸载。因此，塑性铰是有方向性的。

根据支架的内力对整个支架进行弹性分析，首先应判定哪些截面处于弹（塑）性状态，哪些截面进入了屈服状态。为此，下面首先建立金属支架在内力作用下的截面广义屈服条件。

一、金属支架的截面广义屈服条件

巷道金属支架，尤其是拱形金属支架的内力含有弯矩 M 、轴力 N 和剪力 Q ，这时剪力的影响较小，可以忽略不计。因此在进行极限分析时，为使截面达到极限状态，应使用包括弯矩和轴力的组合极限条件，即

$$\Phi(M, N) = 0 \quad (5-45)$$

(一) 矩形截面梁的截面广义屈服条件

为说明在轴力和弯矩联合作用下的广义屈服条件，以典型的 $b \times 2h$ 的矩形截面（图 5-9a）的曲梁为例进行说明，以便以后与其他的截面形式的支架进行比较分析。

当截面只有轴力作用时，其极限轴力为

$$N_p = 2bh\sigma_s \quad (5-46)$$

式中 σ_s ——材料的屈服极限应力。

当截面只有弯矩单独作用时，其极限弯矩为

$$M_p = 2bh^2\sigma_s \quad (5-47)$$

当截面上同时有弯矩和轴力作用时，在极限状态下，按其应力分布（图 5-9）可求得轴力和弯矩分别为

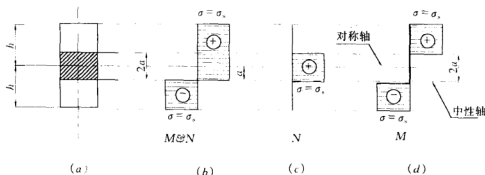


图 5-9 矩形截面的正应力分布

(a) 轴力作用下的应力计算区；(b) 弯矩和轴力联合作用下的应力分布；

(c) 轴力作用下的计算应力；(d) 弯矩作用下的计算应力

$$\begin{aligned} N &= - \int_{-h}^a b\sigma_s dz + \int_a^h b\sigma_s dz \\ &= - b\sigma_s(h+a) + b\sigma_s(h-a) \\ &= - 2ba\sigma_s \\ M &= - \int_{-h}^a b\sigma_s dz + \int_a^h b\sigma_s dz \\ &= - b\sigma_s \frac{a^2 - h^2 - h^2 + a^2}{2} \end{aligned}$$

$$= -b\sigma_s(a^2 - h^2)$$

进行无量纲化, 用无量纲变量表示轴力和弯矩, 设

$$n = \frac{N}{N_p} = -\frac{a}{h}$$

$$M = \frac{M}{M_p} = -\left(\frac{a^2}{h^2} - 1\right) = 1 - \frac{a^2}{h^2}$$

由以上两式可得

$$m = 1 - \frac{a^2}{h^2} = 1 - n^2$$

或写成

$$m + n^2 = 1 \quad (5-48)$$

如果弯矩的方向和以上所设的方向相反, 则有:

$$-m + n^2 = 1 \quad (5-49)$$

式 (5-48) 和式 (5-49) 在 m 和 n 坐标中为两条二次抛物线, 如图 5-10 所示。

当 $m=0$ 时, 即只有轴力单独作用时, $n = \pm 1$; 当 $n=0$ 时, 只有弯矩单独作用时, $m = \pm 1$, 则表示图 5-10 中的正方形 $ABCD$ 。

(二) 工字钢截面梁的广义屈服条件

矿用工字钢金属支架的型钢截面, 为分析

方便, 可简化为如图 5-11 的理想工字钢截面形式, 这时讨论应分两种情况进行。

1. 中性轴位于腹板内

中性轴位于腹板内, 如图 5-12 所示, 这时轴力的计算面积

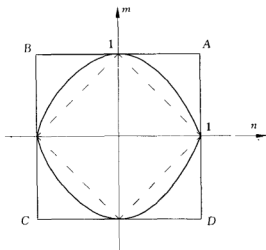


图 5-10 m 和 n 的关系曲线

$A \leq A_w$, 这里的 A_w 为腹板面积。这时的轴力为:

$$n = \frac{N}{N_p} = \frac{A_a}{A} = \frac{2t_w a}{A} \quad (5-50)$$

式中 A_a ——轴力的计算面积 $A_a = \frac{N}{\sigma_s}$;

A ——工字钢的截面面积;

t_w ——腹板厚度;

a ——中性轴位置高度。

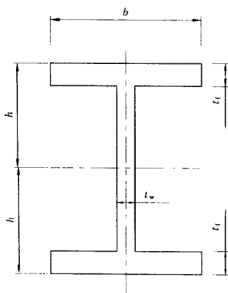


图 5-11 理想工字钢截面

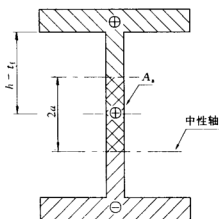


图 5-12 中性轴位于腹板内的情况

$$\begin{aligned} M = & - \int_{-h}^{-h+t_f} b \sigma_s z dz - \int_{-h+t_f}^{-a} t_w \sigma_s z dz \\ & + \int_{-a}^{h-t_f} t_w \sigma_s z dz + \int_{h-t_f}^h b \sigma_s z dz \end{aligned} \quad (5-51)$$

而 $M_p = t_w (h - t_f)^2 \sigma_s + b t_f (h + 2 t_f) \sigma_s \quad (5-52)$

将式 (5-51) 和式 (5-52) 代入 $m = \frac{M}{M_p}$ 并整理得:

$$m = 1 - \frac{t_w a^2}{\frac{1}{2} A_f (2h - t_f) + \frac{1}{2} A_w (h - t_f)} \quad (5-53)$$

式中 A_f ——翼缘板总面积 $A_f = 2bt_f$;

A_w ——腹板总面积, $A_w = 2(h - t_f)t_w$ 。

将式 (5-50) 代入式 (5-53) 消去 a , 最后得中性轴在腹板内的广义屈服条件:

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{M}{M_p} = 1 - \left(\frac{N}{N_p} \right)^2 \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{A_f}{A} \right)^2 \left(1 - \frac{t_w}{b} \right)} \right] \\ n &= \frac{N}{N_p} \leq \frac{A_w}{A} \end{aligned} \right\} \quad (5-54)$$

2. 中性轴在翼缘板内

这时 $A_a > A_w$, A_a 相当于一个高为 $2a$ 、翼缘板厚度 $t_f' = a - (h - t_f)$ 的工字钢截面, 如图 5-13 所示。

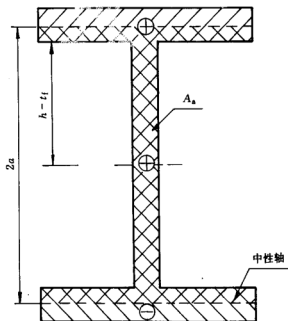


图 5-13 中性轴在翼缘板内的情况

这时

$$n = \frac{N}{N_p} = \frac{A_a}{A} \quad (5-55)$$

$$M = - \int_{-h}^{-h+a} b \sigma_s z dz + \int_{-h+a}^{-h+t_f} b \sigma_s z dz + \int_{-h+t_f}^{h-t_f} t_w \sigma_s z dz \quad (5-56)$$

将式 (5-56) 和式 (5-52) 代入 $m = \frac{M}{M_p}$, 并与式 (5-55)

消去 a , 获得中性轴在翼缘板内的工字钢截面广义屈服条件

$$m = \frac{M}{M_p} = 1 - \left[\frac{\left(\frac{N}{N_p} \right)^2 - \left(1 - \frac{t_w}{b} \right) \left(\frac{A_a - A_w}{A} \right)}{1 - \left(\frac{A_f}{A} \right)^2 \left(1 - \frac{t_w}{b} \right)} \right]^2 \quad (5-57)$$

$$\frac{A_w}{A} \leq \frac{N}{N_p} = n \leq 1$$

分析上面的公式可以看出, 工字钢截面的广义屈服函数 $\varphi(m, n) = 0$ 与工字钢的截面参数 A_w 和 A_f 有关。图 5-14 根据式 (5-54) 和式 (5-57) 给出了矩形截面和工字钢截面的在轴力和弯矩联合作用下的屈服曲线 (取第一象限部分)。从图中可

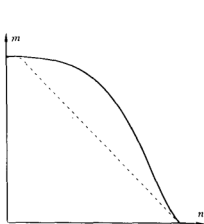


图 5-14 矩形截面和工字钢截面在轴力和弯矩联合作用下的屈服曲线

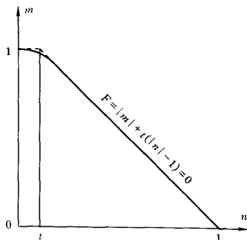


图 5-15 工字钢截面的屈服曲线

以看出, 除轴力 n 不很大外, 广义屈服曲线基本为直线, 而且当 n 不很大时, 轴力对弯矩影响不明显。例如对工字钢当 $n = 0.1$ 时, $m = 0.983$, 极限弯矩仅减少 1.7%, 因此, 在对实际进行分析时, 往往可以进行适当地简化。如用图 5-15 中的虚线表示:

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq n \leq \alpha & \quad |m| - 1 = 0 \\ \alpha \leq n \leq 1 & \quad |m| + t(|n| - 1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-58)$$

式中 α 、 t ——屈服参数, 可根据不同型钢进行选取。

在使用工字钢截面的屈服条件时, 应该注意以下几点:

(1) 在一般的建筑结构中, 由于 n 一般比较小, 因此可以不考虑轴力的影响, 但在对带拱形的巷道金属支架, 一般 n 值都比较大, 必须考虑轴力的影响。

(2) 由于在广义屈服条件中, 轴力和弯矩是非线性的, 给实际应用带来困难, 因此我们用式 (5-58) 作为近似曲线。从图

5-17 可以看出, 式 (5-58) 曲线位于实际广义屈服曲线式 (5-54) 和式 (5-57) 的上方, 因此所求的极限荷载略高于真的极限荷载, 是真实局限荷载的上限。

(3) 为获得真实的解答, 也可以不采用上述的近似屈服曲线的方法, 而用逐次渐近法进行计算, 其方法是: 先不考虑轴力, 求出极限荷载及对应的轴力; 根据这个轴力, 求截面的修正极限弯矩并进行极限分析, 求修正的极限荷载及对应的轴

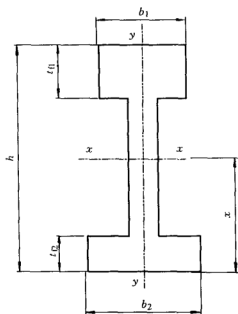


图 5-16 等效工字钢截面

力, 再次修正极限弯矩; 重复上述的步骤直到获得满足要求的计算结果为止。

(三) U 型钢截面的广义屈服条件

U 型钢的截面形状比上述的矩形截面工字钢截面的形状要复杂些, 最明显的特征是矩形截面和工字形截面有 $x-x$ 和 $y-y$ 两个对称轴, 而 U 型钢截面仅有 $y-y$ 一个对称轴。为分析方便, 根据 U 型钢截面的形状特点, 实际上也可以简化为一个对称轴的等效工字钢截面, 如图 5-16 所示。U 型钢等效的截面参数见表 5-1 所示。

表 5-1 U 型钢所对应的等效工字形截面参数

单位: mm

| | h | b_1 | b_2 | t_f | t_w | i_x | x |
|-----------------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| U ₁₈ | 100 | 38.0 | 58.5 | 18.0 | 10.0 | 12.9 | 49.5 |
| U ₂₅ | 110 | 42.0 | 52.2 | 26.0 | 17.0 | 14.4 | 63.5 |
| U ₂₉ | 121 | 40.8 | 54.0 | 28.5 | 16.0 | 20.1 | 66.3 |
| U ₃₆ | 138 | 47.5 | 60.0 | 31.5 | 17.0 | 20.5 | 65.7 |

建立 U 型钢的截面广义屈服条件与工字钢没有多大的区别, 同样应该分中性轴在腹板内和中性轴在翼缘板内两种情况进行讨论。

当中性轴在腹板内, 有:

$$\left. \begin{aligned} N &= - \int_0^{t_{f2}} b_2 \sigma_s dz - \int_{t_{f2}}^{\xi} t_w \sigma_s dz + \int_{\xi}^{h-t_{f1}} t_w \sigma_s dz + \int_{h-t_{f1}}^h b_1 \sigma_s dz \\ M &= - \int_0^{t_{f2}} b_2 \sigma_s z dz - \int_{t_{f2}}^{\xi} t_w \sigma_s z dz + \int_{\xi}^{h-t_{f1}} t_w \sigma_s z dz + \int_{h-t_{f1}}^h b_1 \sigma_s z dz \end{aligned} \right\} \quad (5-59)$$

当中性轴在翼缘板内, 则有

$$\left. \begin{aligned} N &= - \int_0^{\xi} b_2 \sigma_s dz + \int_{\xi}^{t_{f2}} b_2 \sigma_s dz + \int_{t_{f2}}^{h-t_{f1}} b_2 \sigma_s dz + \int_{h-t_{f1}}^h b_2 \sigma_s dz \\ M &= - \int_0^{\xi} b_2 \sigma_s z dz + \int_{\xi}^{t_{f2}} b_2 \sigma_s z dz + \int_{t_{f2}}^{h-t_{f1}} b_2 \sigma_s z dz + \int_{h-t_{f1}}^h b_2 \sigma_s z dz \end{aligned} \right\} \quad (5-60)$$

式中 ξ ——中性轴的位置。

把式 (5-59) 和式 (5-60) 分别消去 ξ , 即获得 U 型钢截面广义屈服条件。由于表达式十分繁琐, 这里就不再赘述了。

二、金属支架的弹塑性矩阵分析

上面分析, 支架结构某一截面在弯矩 M 和轴力 N 作用下, 支架有弹性、弹塑性和完全塑性三种状态。在对整个支架进行力学分析和计算时, 首先应该构造支架的塑性区域。这时采用解析方法求解是困难的, 可行的方法应该是在荷载作用下, 采用弹性模型进行计算, 再按上一节的方法判断每个截面是否超过屈服条件。超过屈服条件的, 根据屈服条件给出该截面的内力, 再行计算, 由反复判断、迭代, 获得比较接近于实际情况的塑性区分布。实际上这种分析方法是很复杂的, 计算量非常大, 这里引入塑性铰概念, 采用有限元方法进行弹塑性分析。这种方法不考虑塑性区域的范围。采用上一节的截面广义屈服条件判断结点是否进入完全塑性状态。达到完全塑性状态的, 用塑性铰表示, 即其变形将是任意的。

单元的弹塑性刚度矩阵:

前面已经说明, 在有限元方法中, 所有的荷载都应等效地用节点荷载, 而单元中间没有荷载作用, 因此最大弯矩 (绝对值) 发生在单元的端部截面上, 而对于直杆单元, 单元内的轴力为常量。根据截面广义屈服条件可知, 塑性铰只在单元的端部出现, 所以在结构弹塑性分析中, 单元 (i, j) 不外乎有以下四种类型:

- a. 单元端部 i 和 j 截面都是弹性的;
- b. i 端为弹性, j 端为塑性铰;
- c. j 端为弹性, i 端为塑性铰;
- d. i, j 端均为塑性铰。

假设支架在某一荷载水平下至少有一端处于完全塑性状态, 在这基础上, 荷载又增加了 δp , 这时单元点的位移增加了 $\delta \Delta$, 因此这个位移包含有弹性位移和塑性位移。

$$\delta\Delta = \begin{Bmatrix} \delta\Delta_i \\ \delta\Delta_j \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \delta u^e \\ \delta H^e \end{Bmatrix}}_{\text{弹性位移}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \delta\Delta_i^p \\ \delta\Delta_j^p \end{Bmatrix}}_{\text{塑性位移}} \quad (5-61)$$

代入式 (5-11) 得

$$\delta p^e = \begin{Bmatrix} \delta p_i^e \\ \delta p_j^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\Delta_i - \delta\Delta p \\ \delta\Delta_j - \delta\Delta p \end{Bmatrix} \quad (5-62)$$

由塑性理论的正交流动法则:

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5-63)$$

式中 $d\epsilon_{ij}^p$ ——塑性应变增量;

f ——屈服函数;

σ_{ij} ——应力分量;

$d\lambda$ ——比例常数, 在塑性状态下, $d\lambda \geq 0$ 。

推广到本问题, 式 (6-62) 可写成:

$$\delta\Delta^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial P} \quad (5-64)$$

式中 f ——广义屈服函数。

$$\text{令} \quad \varphi = \frac{\partial f}{\partial P}$$

$$\text{则} \quad \{\delta\Delta_i, \delta\Delta_j\}^T = [\dot{\lambda}_i \varphi_i \quad \dot{\lambda}_j \varphi_j]^T$$

$$\varphi_i = \left(\frac{\partial f}{\partial P} \right)_i$$

$$\varphi_j = \left(\frac{\partial f}{\partial P} \right)_j \quad (5-65)$$

将式 (5-65) 代入式 (5-62), 得:

$$\delta p^e = K^e (\delta\Delta^e - \dot{\lambda} \varphi) \quad (5-66)$$

式中

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_i & 0 \\ 0 & \varphi_j \end{bmatrix}$$

$$\dot{\Lambda} = [\dot{\lambda}_i \quad \dot{\lambda}_j]^T$$

当 $\dot{\Lambda} = 0$ 时, 则式 (5-66) 退化为弹性单元刚度方程。

如果截面屈服，形式上为塑性铰，应该正好满足广义屈服条件，即 $\delta F = 0$ 。即对于单元 \bar{ij} 有：

$$\{\delta F\} = \left\{ \begin{matrix} (\partial F / \partial P)_i^T \cdot \delta p_i \\ (\partial F / \partial P)_j^T \cdot \delta p_j \end{matrix} \right\} = \varphi^T \delta p^e = 0 \quad (5-67)$$

把式 (5-66) 代入上式，得

$$\varphi^T K^e (\delta \Delta^e - \varphi \dot{\Lambda}) = 0 \quad (5-68)$$

由上式可获得 $\dot{\Lambda}$ ：

(a) i, j 两端均为弹性

$$\dot{\Lambda} = [\dot{\lambda}_i \quad \dot{\lambda}_j]^T = 0$$

(b) i 端为弹性， j 端为塑性铰

$$\dot{\lambda}_i = 0, \quad \dot{\lambda}_j = \frac{\varphi^T}{\varphi_j^T k_{jj} \varphi_j} [k_{ji} \quad k_{jj}] \delta \Delta^e$$

(c) j 端为弹性， i 端为塑性铰

$$\dot{\lambda}_j = 0, \quad \dot{\lambda}_i = \frac{\varphi_i^T}{\varphi_i^T K_{ii} \varphi_i} [K_{ii} \quad K_{jj}] \delta \Delta^e$$

把式 (5-66) 代入上式，得

$$\varphi^T k^e (\Delta^e - \varphi \dot{\Lambda}) = 0 \quad (5-68')$$

(d) i, j 两端均为塑性铰

$$\begin{Bmatrix} \dot{\lambda}_i \\ \dot{\lambda}_j \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \varphi_i & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_i & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \Delta_i \\ \delta \Delta_j \end{Bmatrix} \right\}$$

总之， $\dot{\Lambda}$ 可以写成

$$\dot{\Lambda} = \Omega \delta \Delta^e \quad (5-69)$$

这里： i, j 两端均为弹性， $\Omega = 0$ (5-69a)

$$i \text{ 端弹性, } j \text{ 端塑性铰 } \Omega = \frac{\varphi^T}{\varphi_j^T k_{jj} \varphi_j} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \quad (5-69b)$$

$$i \text{ 端塑性铰, } j \text{ 端弹性 } \Omega = \frac{\varphi^T}{\varphi_j^T k_{jj} \varphi_i} \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-69c)$$

$$i, j \text{ 两端均为塑性 } \Omega = (\varphi^T k^e \varphi)^{-1} \varphi^T k^e \quad (5-69d)$$

将式 (5-69) 代入式 (5-66), 则获得用增量形式表示的单元刚度方程:

$$\begin{aligned} \delta P^e &= K^e (I - \varphi \Omega) \delta \Delta^e \\ &= K^p \Delta^e \end{aligned} \quad (5-70)$$

$$\text{式中 } K^p = K^e (I - \varphi \Omega); \quad (5-70')$$

I ——单位矩阵。

式 (5-70) 适应于四种弹塑性状态单元, 具体应用时应根据不同状态, 代入不同的由式 (5-69) 所定义的 Ω 进行计算。

三、弹塑性分析的计算方法

如果整个金属支架各单元都处在弹性状态, 这时利用结构刚度方程由荷载一次可以求出节点位移来, 但是在对支架进行弹塑性分析时, 由于并不知道支架在荷载作用下塑性铰发生在哪些断面, 因此就不知道在式 (5-69) 中的 Ω 应用哪一表达式。因此按一般的弹塑性方法应采用增量方法, 即逐渐地增加荷载, 逐步进行判断。例如, 随着荷载的增加到达某一水平时, 首先第 i 个结点满足广义屈服条件。下一步将 i 结点的相邻两个单元分别用式 (5-69b) 和式 (5-69c) 的 Ω 代入, 然后继续增加荷载, 再用广义屈服条件判断。这样逐步地进行, 这种方法对一般结构是可行的。但是对于地下结构和巷道金属支架问题, 由于必需考虑支架与围岩的相互作用效应, 即支架所受的荷载与围岩的变形有关, 所以采用这种计算方法计算工作量是非常大的。这里介绍一种荷载倍数法进行塑性分析, 能有效地克服这一缺点。

如图 5-17 所示, 设在某一荷载阶段 $(I-1)$ 时的荷载为 P_{I-1} , 各结点的截面内力按弹性计算为 $S_{I-1}^T = [N^{I-1}, Q^{I-1}, M^{I-1}]^T$, 而截面的广义屈服条件 $F=0$ 。下一步在此基础上把荷载增加一个增量 $\Delta \bar{P}$ (可以用单位荷载量表示), 由此计算出位

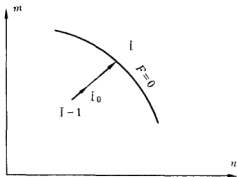


图 5-17 荷载路径

移增量 $\Delta \bar{U}_0$ ，再求出断面内力增量 ΔS_0 。这时的结点截面内力为 $S_{I-1} + \Delta S$ 。

将内力增量 ΔS_0 乘以适当的倍数 μ ，使结点的截面内力为 $S_I = S_{I-1} + \mu \Delta S_0$ ，使之正好满足广义屈服条件 $F(S_{I-1} + \mu \Delta S_0) = 0$ ，求出 μ 值。对于每个结点截面，都有一个 μ 值，求出最小的 μ 值 μ_{\min} 及其所在结

点，这就是整个支架的初始屈服状态。

这时

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_I &= \bar{P}_{I-1} + \mu_{\min} \Delta \bar{P}_0 \\ \bar{U}_I &= \bar{U}_{I-1} + \mu_{\min} \Delta \bar{U}_0 \end{aligned} \right\} \quad (5-71)$$

支架进入塑性阶段后，继续增加荷载 P_I ，该结点的内力是 $F=0$ 上移动塑性状态或是回到 $F<0$ 的弹性状态，都可以用常数 λ 进行相应地判断； $\lambda \geq 0$ 时仍然保持塑性状态，当 $\lambda < 0$ 时恢复到弹性状态。因此，可以利用式 (5-69) 计算 λ 值，根据 λ 值的正负性重新选用 Ω 值，求出相应的刚度矩阵并重新计算。

当 $\lambda \geq 0$ 时，内力在 $F=0$ 的广义屈服条件曲线上移动，见图 5-17 所示。这时下一步的内力可用下式确定：

$$S = S_{I-1} + \theta \Delta S_{I-1}$$

式中 $\theta = \frac{\partial F}{\partial P}$ ，如果利用式 (5-58) 形式的广义屈服条件，则 $\theta = \text{常数}$ 。

至于与支架围岩的相互作用，可采用第三章第二节的围岩处理方法，采用集中弹簧模型或地基刚度矩阵法处理。以下的计算步骤按集中弹簧模型考虑。

随着荷载的增加, 支架结构的塑性区不断扩大, 塑性铰也在增加。在一般的结构中, 当塑性铰增加到一定数量时, 就形成可变机构。节点的位移可以无限变形, 这时计算就完成。但对于巷道金属支架, 由于围岩的约束作用, 有的可能形成机构, 有的则未必能形成机构, 但位移仍然可以不断发展。此时应该引入一判断条件。当位移 U 达不到某一值时, 计算即结束。 U 的数值选择不宜太大, 应控制在小变形理论允许的范围内, 一般为型钢高度的 1~2 倍为宜, 当然这个位移值也可用 $|\bar{K}|$ 来表示。使得 $|\bar{k}| < \epsilon$ 时, 计算结束。

全部计算步骤如图 5-18 所示。

四、算例

下面采用上述的分析方法讨论围岩力学性质对金属支架的弹性动态的影响。

作为算例, 考虑的三铰半圆拱刚性工字钢支架, 受垂直均匀荷载 q 的作用。工字钢截面为 100mm × 100mm × 5mm × 7mm, 材料屈服极限 $\sigma_s = 300\text{MPa}$, 广义屈服条件为:

$$0 \leq n \leq 0.15 \quad F = |m| - 1 = 0$$

$$0.15 \leq n \leq 1 \quad F = m + 1.18 (|n| - 1) = 0$$

围岩的弹性抗力系数分别选取 $k = 0.0, 30.0, 50.0, 100.0, 250.0$ 和 1000.0 MPa/m 进行计算。

图 5-19 是拱顶结点 10 的垂直位移和荷载 q 的关系曲线, 图中的数字为屈服的结点号, 从图中可以看出:

(1) 不论围岩的弹性抗力系数 K 值的大小如何, 屈服结点出现的顺序分别为: 2 和 18, 1 和 19, 7 和 13, 3 和 17……。

(2) 这些屈服结点出现的位置均有围岩弹性抗力的约束, 因此, 虽然出现塑性铰, 但都不能使支架形成可变机构。

(3) 除 $K = 0$ 外, 最后支架的极限承载能力差别不大, 但位移值有较大的差异。

图 5-20 是随着荷载的增加, 结点截面的内力变化情况。从

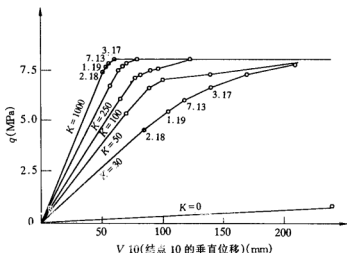


图 5-19 荷载—结点位移曲线

图中可以看出，结点进入屈服状态后，内力在屈服曲线上往 n 轴移动。最后，单元①和单元⑬都达到接近于完全塑性的轴力。

表 5-2 是第 2 屈服点出现时的支架内力，从表中可知， K 值越大，轴力的屈服状态影响越大。当 $K = 1000$ 时， $n = 0.89$ 。

表 5-2 第 2 屈服点出现时的支架内力

| K (MPa/m) | 0 | 30 | 50 | 100 | 250 | 1000 |
|------------------------------------|------|------|------|------|------|------|
| $m = \left \frac{M}{M_p} \right $ | 1.0 | 0.49 | 0.42 | 0.33 | 0.23 | 0.13 |
| $n = \left \frac{N}{N_p} \right $ | 0.08 | 0.59 | 0.65 | 0.74 | 0.81 | 0.89 |
| 荷载 (MPa) | 0.3 | 6.2 | 7.3 | 7.9 | 8.2 | 8.2 |

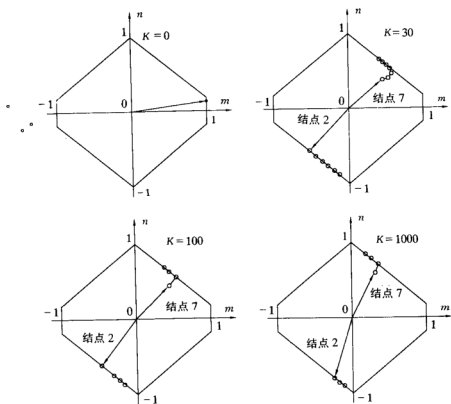


图 5-20 荷载 - 内力变化

第六章 巷道金属支架稳定性分析

第一节 概 述

巷道金属支架，如果按其强度进行计算，支架一般都有较高的承载能力。事实上，根据现场实测和分析以及实验室整体支架的试验分析发现，巷道金属支架的承载能力往往没有按强度计算的承载能力那么高，原因是支架“失稳”而使支架丧失承载能力，支架的“屈曲”变形是支架破坏的主要形式。在结构的设计和计算中，不但要对结构进行强度和刚度计算，而且应该进行稳定性验算，尤其是对于象矿工钢、U型钢这类薄壁结构以及高强度材料构件，结构稳定性分析往往是非常重要的。经过稳定性分析，做到以下几点可以提高巷道金属支架的整体承载能力：

- (1) 选取合理的架型，或优化选取支架形状；
- (2) 优化支架参数，如合理的搭接部分位置、数目和长度；
- (3) 加强支架之间的联系，避免支架产生平面外的失稳。

从结构的稳定性角度考虑，平衡状态实际上有三种不同的情况、稳定平衡状态、不稳定平衡状态和中性平衡状态。假设结构原来处于某种平衡状态，后来由于受到轻微扰动而稍微偏离原来的位置，当干扰消失后，如果结构还能回到原来的位置，则原来的平衡状态称为稳定平衡状态；如果结构继续偏离，不能回到原来的位置，则原来的平衡状态称为不稳定平衡状态。结构由稳定平衡状态到不稳定平衡状态过渡的中间状态称为中性平衡状态。结构随着荷载的加大，由稳定平衡状态转变为不稳定平衡状态，这时原来的平衡状态丧失稳定性，简称失稳。

巷道金属支架的失稳包括平面内失稳和平面外失稳。所谓平

面内失稳是指金属支架的失稳变形是在支架同一平面内，即发生在 xoy 平面上，在平面外的 z 方向没有产生失稳性变形，这是金属支架失稳破坏的主要形式；而平面外失稳是指支架的失稳变形是沿着巷道的轴向（ z 方向）发生扭转失稳变形，在 xoy 平面上不发生失稳性变形。这种变形的出现主要是支架承受太大的平面外荷载，而与支架本身的强度关系不大。所以通过改善金属支架的背板结构、加强支架与支架之间的拉杆联系等措施来避免平面外的失稳。

常见的平面内失稳变形形式较多，图 6-1 是直腿半圆拱 U 型钢可缩性支架的几种失稳变形形式。

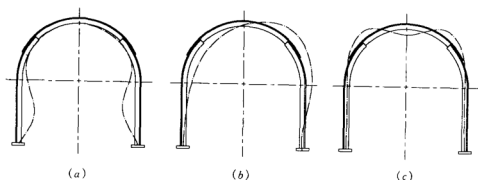


图 6-1 巷道金属支架的失稳
(a) 横腿屈曲；(b) 反对称屈曲；(c) 对称屈曲

第二节 刚性金属支架的稳定性

刚性金属支架的主要形式有梯形金属支架，拱形金属支架和封闭形金属支架。

一、梯形金属支架

梯形金属支架主要由直杆构成，而且棚腿与棚梁一般采用铰

接连接，因此棚梁与腿柱部属于压杆，一般采用压杆稳定进行验算即可。

利用欧拉公式压杆的临界压力为

$$P_{er} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad (6-1)$$

式中 P_{er} ——临界压力；

EI ——物件抗弯刚度；

μl ——压杆的相当长度， μ 为长度系数：两端铰支 $\mu =$

1，一端固定一端为 $\mu = 2$ ，两端固定 $\mu = \frac{1}{2}$ ，一端

固定一端铰支时 $\mu = 0.7$ 。

也可以用临界应力表示

$$\sigma_{er} = \frac{P_{er}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l/r)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (6-2)$$

式中 $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ ——压杆横截面对 z 轴的惯性半径；

$\lambda = \mu l/r$ ——压杆长细比或柔度，为一无量纲，由式 (6-2) 可见 λ 值越大，相应 σ_{er} 值就越小，压杆越容易失稳。在实际应用时，可根据长细比查表获得折减系数中值 (表 6-1)。

表 6-1 折减系数 ϕ 值表

| 序 号 | 柔度 λ | ϕ 值 | | | |
|-----|--------------|------------|-------|------|------|
| | | 钢 | | | 木 材 |
| | | A_2, A_3 | A_5 | 16Mn | |
| 1 | 0 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 2 | 10 | 0.99 | 0.98 | 0.99 | 0.99 |
| 3 | 20 | 0.98 | 0.95 | 0.97 | 0.97 |
| 4 | 30 | 0.96 | 0.93 | 0.94 | 0.93 |
| 5 | 40 | 0.93 | 0.90 | 0.90 | 0.87 |
| 6 | 50 | 0.89 | 0.84 | 0.84 | 0.80 |
| 7 | 60 | 0.84 | 0.80 | 0.78 | 0.71 |

续表

| 序 号 | 柔度 λ | ϕ 值 | | | |
|-----|--------------|------------|-------|------|------|
| | | 钢 | | | 木 材 |
| | | A_2, A_3 | A_5 | 16Mn | |
| 8 | 70 | 0.79 | 0.74 | 0.71 | 0.60 |
| 9 | 80 | 0.73 | 0.66 | 0.63 | 0.48 |
| 10 | 90 | 0.67 | 0.59 | 0.55 | 0.38 |
| 11 | 100 | 0.60 | 0.50 | 0.46 | 0.31 |
| 12 | 110 | 0.54 | 0.43 | 0.38 | 0.25 |
| 13 | 120 | 0.47 | 0.38 | 0.33 | 0.22 |
| 14 | 130 | 0.40 | 0.32 | 0.28 | 0.18 |
| 15 | 140 | 0.35 | 0.28 | 0.24 | 0.16 |
| 16 | 150 | 0.31 | 0.27 | 0.21 | 0.14 |
| 17 | 160 | 0.27 | 0.24 | 0.19 | 0.12 |
| 18 | 170 | 0.24 | 0.21 | 0.17 | 0.11 |
| 19 | 180 | 0.22 | 0.19 | 0.15 | 0.10 |
| 20 | 190 | 0.20 | 0.17 | 0.14 | 0.09 |
| 21 | 200 | 0.18 | 0.15 | 0.12 | 0.08 |

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi [\sigma]$$

式中 σ ——压杆截面正应力。

二、拱形金属支架

圆拱在均匀静水压力 q 作用下有稳定性问题，当 q 值较小时，如果忽略轴向变形，则圆拱内只产生轴向压力而没有弯矩和剪力，即处于初始无弯矩状态。当荷载 q 达某一极限值 q_{cr} 时，圆拱会突然发生屈曲，产生偏离原轴线形式的变形，从而丧失稳定性。

下面建立圆拱稳定微分方程，考虑圆拱屈曲后的受力状态。从圆弧拱中取微弧段 ds 。如图 6-2 所示，圆弧段屈曲之前，只有轴力 N ，而剪力 Q 和弯矩 M 均为零，屈曲后，轴力 N_0 增加了 N_1 ，同时产生弯矩 M 和剪力 Q ，曲率半径由原来的 R 变化为

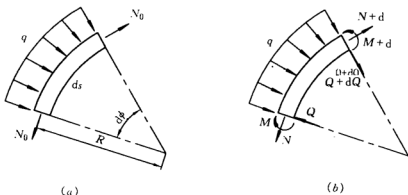


图 6-2 圆弧段屈曲前后的受力

$\rho = R + \Delta R$ 。根据平衡关系，有：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_1}{ds} &= \frac{Q}{\rho} \\ \frac{dQ}{ds} &= -\frac{1}{\rho} (N_1 + q\Delta R) \\ \frac{dM}{ds} &= Q \end{aligned} \right\} \quad (6-3)$$

由 $ds = R d\varphi$, $\frac{R}{\rho} \approx 1$, 由式 (6-3) 消去 N_1 和 Q , 得

$$\frac{d^3 M}{ds^3} + \frac{dM}{ds} + Rq \frac{d(\Delta R)}{d\varphi} = 0 \quad (6-4)$$

另由材料力学：

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{R}\right) &= \frac{M}{EI} \\ \frac{1}{R} - \frac{1}{R + \Delta R} &= \frac{M}{EI} \\ \Delta R &= \frac{MR^2}{EI} \end{aligned} \quad (6-5)$$

代入式(6-4)得

$$\frac{d^3 M}{d\varphi^3} + \left(1 + \frac{qR^3}{EI}\right) \frac{dM}{d\varphi} = 0 \quad (6-6)$$

这就是用 M 表示的圆拱在静水压力条件下的稳定微分方程。

其次考察圆弧段的变形, 如图 6-3 所示, 圆拱微段 ds 的屈曲前位置 AB 到屈曲后

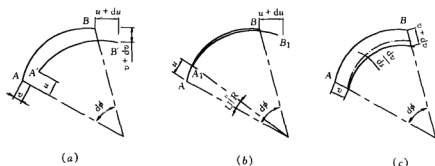


图 6-3 圆弧段的变形

(a) 一般变形; (b) 线变形; (c) 角变形

$A'B'$, 相对应的切线和法线位移分量 u 和 v , ds 产生的线应变为

$$\epsilon = \frac{du}{Rd\varphi} - \frac{v}{R}$$

假设线应变很小, 可以忽略不计, 即 $\epsilon = 0$, 得

$$\frac{du}{d\varphi} = v \quad (6-7)$$

另外截面 A 的转角 θ , 如图 6-3 (b), (c) 所示, 由于切向位移产生的转角为 u/R , 由于法向位移产生的转角为 $\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{Rd\varphi}$, 因此

$$\theta = \frac{u}{R} + \frac{dv}{d\varphi} = \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R^2} \left(\frac{d^3 u}{u d\varphi^3} + \frac{du}{d\varphi} \right)$$

由材料力学:

$$\begin{aligned} M &= -EI \frac{d\theta}{ds} \\ &= -\frac{EI}{R^2} \left(\frac{d^3 u}{d\varphi^3} + \frac{du}{d\varphi} \right) \end{aligned} \quad (6-8)$$

将式 (6-8) 代入式 (6-6), 得用 u 表示的稳定微分方程

$$\frac{d^6 u}{d\varphi^6} + \frac{d^4 u}{d\varphi^4} + \beta^2 \left(\frac{d^4 u}{d\varphi^4} + \frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right) = 0 \quad (6-9)$$

式中 $\beta = \sqrt{1 + \frac{qR^3}{EI}}$

方程 (6-9) 的一般解为:

$$u = C_1 + C_2 \varphi + C_3 \sin \varphi + C_4 \cos \varphi + C_5 \sin \beta \varphi + C_6 \cos \beta \varphi \quad (6-10)$$

$$v = \frac{du}{d\varphi} = C_2 + C_3 \cos \varphi - C_4 \sin \varphi + C_5 \beta \cos \beta \varphi - C_6 \beta \sin \beta \varphi \quad (6-11)$$

$$M = -\frac{EI}{R^2} [C_2 + C_5(1 - \beta^2)\beta \cos \beta \varphi - C_6(1 - \beta^2)\beta \sin \beta \varphi] \quad (6-12)$$

根据问题的边界条件, 可以获得含有积分常数 $C_1 \sim C_6$ 的代数方程, 这时要求 $C_1 \sim C_6$ 为不全为零的解, 从而获得圆拱稳定问题的特征方程, 即可求临界荷载。

圆弧拱形支架的临界荷载 q_{cr} :

边界条件: $\psi = \pm \gamma$ 时, $u = v = 0 \quad M = 0$ 。

假设拱的临界状态变形有反对称失稳和对称失稳两种, 如图 6-4 所示。

1. 临界状态为反对称变形形式

在式 (6-12) 中, M 为 φ 的奇函数, 删除偶函数项得

$$q_{cr} = \frac{EI}{R^3} \left(\frac{n^2 \pi^2}{r^2} - 1 \right)$$

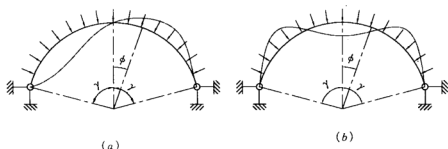


图 6-4 拱的临界状态变形

(a) 反对称失稳; (b) 对称失稳

因此最小临界荷载为

$$M = \frac{EI}{R^2} C_6 (1 - \beta^2) \beta \sin \beta \varphi$$

当 $\varphi = \gamma$ 时, $M = 0$, 得

$$\sin \beta \gamma = 0$$

$$\beta \gamma = n \pi$$

代入 $\beta = \sqrt{1 + \frac{qR^3}{EI}}$ 得

$$q_{cr} = \frac{EI}{R^3} \left(\frac{\pi^2}{\gamma^2} - 1 \right) \quad (6-13)$$

2. 临界状态为对称变形形式

此时 u 为 φ 的奇函数, v 和 M 为 φ 的偶函数, 在式 (6-10) 中消去偶函数项, 式 (6-11) 和式 (6-12) 消去奇函数项, 得

$$\left. \begin{aligned} u &= C_2 \varphi + C_3 \sin \varphi + C_5 \sin \beta \varphi \\ v &= C_2 + C_3 \cos \varphi + C_5 \cos \beta \varphi \\ M &= -\frac{EI}{R^2} [C_2 + C_5 (1 - \beta^2) \beta \cos \beta \varphi] \end{aligned} \right\} \quad (6-14)$$

当 $\varphi = \gamma$ 时, $u = v = 0$ $M = 0$, 代入上式, 使 u 、 v 、 M 不全为零的条件为

$$D = \begin{vmatrix} \gamma & \sin \gamma & \sin \beta \gamma \\ 1 & \cos \gamma & \beta \cos \beta \gamma \\ 1 & 0 & (1 - \beta^2) \beta \cos \beta \gamma \end{vmatrix} = 0$$

整理得

$$\gamma (\beta - \beta^3) + \beta^3 \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \beta \gamma \quad (6-15)$$

由此解出 $\beta \gamma$ 而求得对称变形状态的临界荷载。

对于不同的 γ 值, 两种状态相对应的临界荷载见表 6-2。

表 6-2 不同 γ 值所对应的临界荷载

| γ | 对称变形失稳 $\left(\frac{EI}{R^3}\right)$ | 反对称变形失稳 $\left(\frac{EI}{R^3}\right)$ |
|----------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 30° | 79.205 | 35.00 |
| 45° | 34.995 | 15.00 |
| 60° | 19.120 | 8.00 |
| 75° | 11.123 | 4.76 |
| 90° | - | 3.00 |

由表 6-2 可以看出, 临界状态为对称变形的荷载远大于反对称变形的荷载, 因此, 圆弧拱形支架的临界荷载应按反对称的变形形式计算。

三、圆形封闭式刚性金属支架

对于圆形封闭式金属支架的临界荷载 P_{cr} 的确定, 显然, 弯矩应以 2π 为周期, 即

$$M(0) = M(2\pi)$$

代入式 (6-12), 得

$$\begin{aligned} C_2 + C_5(1 - \beta^2)\beta &= C_2 + C_5(1 - \beta^2)\beta \cos(2\pi\beta) \\ &\quad - C_6(1 - \beta^2)\beta \sin(2\pi\beta) \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad \cos(2\pi\beta) - \frac{C_6}{C_5} \sin(2\pi\beta) = 1$$

显然 $\beta = \pm n$, ($n = 1, 2, 3 \dots$) 是上式的解

$$P_{cr} = (\beta^2 - 1) \frac{EI}{R^3}$$

$\beta = 0$, $\beta = 1$ 时无意义, 当 $\beta = 2$ 时, 得最小的临界值

$$q_{cr} = \frac{3EI}{R^3} \quad (6-16)$$

这就是圆形支架临界荷载的精确解。

对于马蹄形封闭性支架, 如图 6-5 所示, 可看作为由两个两铰拱组成确定临界荷载时可分别按两铰拱进行计算, 以最小者为整个支架的临界荷载值。

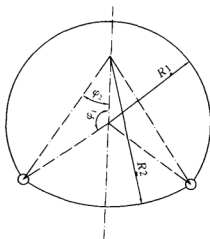


图 6-5 马蹄形封闭性支架

第三节 可缩性支架的稳定性

一、阶梯变截面圆弧多心结构的稳定方程

正如上一章中论述的那样, 金属可缩性支架 (一般为 U 型钢可缩性支架), 由于搭接部分的应力和变形比较复杂, 给支架的力学分析带来一定的难度, 有效的方法是搭接部分用一等效的截面杆件来代替, 这一等效的截面杆件 (直杆或曲杆) 的截面参数应满足第三章第二节所述的三个条件。因此, 可缩性金属支架的计算简图变为变截面的刚架问题, 内力分析是这样的, 在进行稳定性分析也不例外。

在上一节里, 我们给出了在静水压力作用下等截面圆拱用弯矩表示的微分方程式 (6-6) 以及用位移和弯矩表示的微分方程式 (6-8), 将式 (6-8) 代入 (6-6), 还可以获得以下的稳定微分方程式:

$$\frac{d^3 M}{d\varphi^3} + \frac{dM}{d\varphi} = qR \left(\frac{d^3 v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \right) \quad (6-17)$$

式中 v ——圆弧拱的法向位移。

将 M 作为未知函数，求解上述的微分方程的圆弧曲杆弯矩的一般表达式：

$$M(\varphi) = A + B\sin\theta + C\cos\theta + qrv(\varphi) \quad (6-18)$$

式中 A, B, C ——积分常数，由圆弧拱的边界条件所确定。

考虑两铰拱临界状态呈反对移变形。这时式 (6-18) 中 $A = C = 0$ ，由边界条件 $M(\pm\gamma) = 0$ ，得 $B = 0$ ，因此两铰圆拱失稳的弯矩为

$$M(\varphi) = qrv(\varphi) \quad (6-19)$$

将式 (6-19) 代入式 (6-6)，得

$$\frac{d^2 v}{d\varphi^2} + k^2 v = 0 \quad (6-20)$$

式中 $k = 1 + \frac{\rho R^3}{EI}$ 。

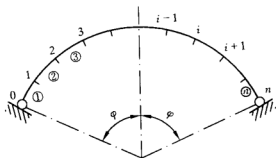


图 6-6 节点和单元编号

如果将圆拱部分分为 n 个阶梯段，每个段为一单元，单元编号如图 6-6 所示，因此第 i 段的稳定微分方程为

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + k_i^2 v_0 = 0$$

$$k_i = 1 + \frac{qr_i^3}{EI_i}$$

(6-21)

式中 r_i ——第 i 段圆拱曲率半径；

EI_i ——第 i 段型钢抗弯刚度。

因此利用式 (6-21) 不但能求解阶梯形变截面问题，而且也能求解多心圆弧拱问题（如三心拱、马蹄形支架等）。

二、阶梯形变截面多心圆弧拱的稳定性计算

对于任意相邻两段阶梯圆弧，第 i 段和第 $i+1$ 段的抗弯刚度 EI_i 和 EI_{i+1} 分别为常量，曲率半径 r_i 和 r_{i+1} 也分别为常量，因此方程 (6-21) 为分段常系数微分方程，其通解为

$$v(\varphi) = C_1^i \sin k_i \varphi + C_2^i \cos k_i \varphi \quad -\alpha_i \leq \varphi \leq 0 \quad (6-22)$$

$$v(\varphi) = C_1^{i+1} \sin k_{i+1} \varphi + C_2^{i+1} \cos k_{i+1} \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha_{i+1} \quad (6-23)$$

在第 i 单元和第 $i+1$ 单元相交的节点上位移应该连续。

$$V(\varphi^-) = V(\varphi^+),$$

$$\left. \frac{dv}{d\varphi} \right|_{\varphi=0^-} = \left. \frac{dv}{d\varphi} \right|_{\varphi=0^+}$$

代入 (6-22) 和式 (6-23)，消去 C_1^i ， C_2^i ， C_1^{i+1} 和 C_2^{i+1} 后，得阶梯形变截面多心圆弧拱位移代数方程

$$v_{i-1} - \alpha_i v_i + b_{i+1} v_{i+1} = 0 \quad (6-24)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= \cos k_i \alpha_i + b_{i+1} \cos k_{i+1} \alpha_{i+1} \\ b_{i+1} &= \frac{k_{i+1}}{k_i} \cdot \frac{\sin k_i \alpha_i}{\sin k_{i+1} \alpha_{i+1}} \end{aligned} \right\} \quad (6-25)$$

$i = 1, 2, \dots, n$ ，而且对于两铰拱，有 $v_o = u_n = 0$ ，联立方程

$$\left. \begin{aligned} -\alpha_1 v_1 + b_2 v_2 &= 0 \\ v_1 - \alpha_2 v_2 + b_3 v_3 &= 0 \\ v_2 - \alpha_3 v_3 + b_4 v_4 &= 0 \\ \cdot &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_{n-4} - \alpha_{n-3} v_{n-3} + b_{n-1} v_{n-2} &= 0 \\ v_{n-3} - \alpha_{n-2} v_{n-2} + b_{n-1} v_{n-1} &= 0 \\ v_{n-2} - \alpha_{n-1} v_{n-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-26)$$

写成矩阵方程

$$[k] \{V\} = \{0\} \quad (6-27)$$

式中 $\{V\} = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}^T$

$$[K] = \begin{bmatrix} -a_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -a_2 & b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-3} & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (6-28)$$

方程 (6-27) 右边为零向量。由于结构失稳时, 位移向量 $\{U\}$ 非全为零, 因此方程 (6-27) 的系数矩阵行列式

$$\det [k] = 0 \quad (6-29)$$

这就是阶梯形变截面多曲率拱形支架稳定性计算的特征方程, 由此可以确定两铰拱在静水压力作用下的临界荷载。

算例: 考虑三心拱形曲腿 U 型钢可缩性支架, 如图 6-7 所示, 基本参数为 $R_2/R_1 = 0.8235$, $\alpha_1 = 0.620$, $\alpha_2 = 0.147$, $\alpha_3 = 0.978$ 。

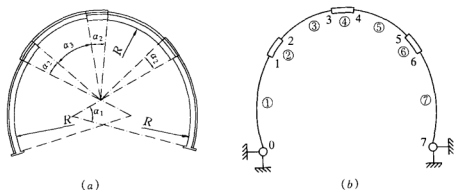


图 6-7 三心拱形曲腿可缩性支架
(a) 支架结构; (b) 计算简图

$$\text{设} \quad EI_1 = EI_3 = EI_5 = EI_7 = EI_9$$

$$EI_2 = EI_4 = EI_6 = 2EI$$

假设支架失稳变形反对称的, 则有 $v_0 = v_7 = 0$, $v_1 = -v_6$, $v_2 = v_5$, $v_3 = -v_4$, 代入式 (6-24), 有:

$$\left. \begin{aligned} 0 - a_1 v_1 + b_2 v_2 &= 0 \\ v_1 - a_2 v_2 + b_3 v_3 &= 0 \\ v_2 - a_3 v_3 - b_4 v_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

由于支架失稳时, v_1 , v_2 , v_3 不能同时为零, 因此有:

$$\begin{vmatrix} -a_1 & b_2 & 0 \\ 1 & -a_2 & b_3 \\ 0 & 1 & -(b_4 + a_3) \end{vmatrix} = 0 \quad (b)$$

展开得

$$-a_1 a_2 (b_4 + a_3) + b_2 (b_4 + a_3) + a_1 b_3 = 0 \quad (c)$$

$$\text{式中} \quad a_1 = \cos k_1 \alpha_1 + b_2 \cos k_2 \alpha_2$$

$$a_2 = \cos k_2 \alpha_2 + b_3 \cos k_3 \alpha_3$$

$$a_3 = \cos k_3 \alpha_3 + b_4 \cos k_4 \alpha_4$$

$$k_1 = \sqrt{1 + \frac{qR_1^3}{EI_0}}$$

$$k_2 = k_4 = \sqrt{1 + \frac{qR_2^3}{EI_2}} = \sqrt{1 + \frac{q(0.8235R_1)^3}{2EI_0}}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{qR_1^3}{3.581EI_0}}$$

$$k_3 = \sqrt{1 + \frac{qR_2^3}{EI_0}} = \sqrt{1 + \frac{q(0.8235R_1)^3}{EI}} = \sqrt{1 + \frac{qR_1^3}{1.791EI_0}}$$

$$b_2 = \frac{k_2 \sin k_1 \alpha_1}{k_1 \sin k_2 \alpha_2}$$

$$b_3 = \frac{k_3 \sin k_2 \alpha_2}{k_2 \sin k_3 \alpha_3}$$

$$b_4 = \frac{k_4 \sin k_3 \alpha_3}{k_3 \sin k_4 \alpha_4}$$

采用优化方法求解式 (C)，最后获取支架的临界荷载为

$$q_{cr} = 3.216293 \frac{EI_0}{R_1^3}$$

三、阶梯形变截面圆形支架的计算

图6-8所示为圆形四节U型钢可缩性支架及其计算简图。

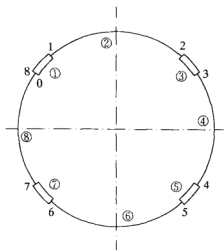


图6-8 圆形四节U型钢可缩性支架及其计算简图

上面的分析表明，等截面圆形结构失稳时是对称变形。在这里，如果阶梯形变截面圆形结构是关于水平和垂直轴对称的，那么我们可以假定这种结构在静水压力作用下失稳变形也是对称的。基本失稳微分方程 (6-17) 中，利用对称条件和边界条件，可得 $A = B = C = 0$ ，同样获得在这种条件下的失稳位移代数方程 (6-24) 及位移矩阵方程 (6-27)，只不过在式 (6-27) 中，位移向量中， $v_0 = v_n \neq 0$ ，因此

$$v = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}^T$$

而相对应的系数矩阵也需作相应的调整：

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & b_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-2} & b_{n-1} \\ b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \\ -a_0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-30)$$

同样的圆形支架失稳时，位移向量 $\{v\}$ 非全零，则系数矩阵式 (6-30) 的行列式必需为零 $\det [k] = 0$ ，由此可以确定临界荷载的大小。

算例：仍然以图 6-8 的圆形四节 U 型钢可缩支架为例。设 U 型钢的抗弯刚度为 EI ，搭接部分的等效抗弯刚度为 $1.7EI$ ， $\alpha_1 = 1.42$ ， $\alpha_2 = 0.15$

因圆环失稳变形是对称的，有：

$$v_1 = v_2 = v_5 = v_6$$

$$v_3 = v_4 = v_7 = v_8$$

因此独立的位移只有两个， v_1 和 v_3 。

$$\text{而常数 } a_1 = a_3 = a_5 = a_7 \quad b_1 = b_3 = b_5 = b_7$$

$$a_2 = a_4 = a_6 = a_8 \quad b_2 = b_4 = b_6 = b_8$$

代入式 (6-24) 中得

$$v_1 - a_2 v_7 + b_2 v_3 = 0$$

$$v_1 - a_1 v_3 + b_2 v_3 = 0 \quad (6-31)$$

$$\text{式中 } a_1 = \cos k_1 \alpha_1 + b_2 \cos k_2 \alpha_2$$

$$a_2 = \cos k_2 \alpha_2 + b_1 \cos k_1 \alpha_1$$

$$b_1 = \frac{k_1 \sin k_2 \alpha_2}{k_2 \sin k_1 \alpha_1}$$

$$b_2 = \frac{k_2 \sin k_1 \alpha_1}{k_1 \sin k_2 \alpha_2}$$

$$k_1 = \sqrt{1 + \frac{qR^3}{1.7EI}}$$

$$k_2 = \sqrt{1 + \frac{qR^3}{EI}}$$

$$\text{因此有} \quad (1 - a_2)(b_2 - a_1) - b_1 = 0 \quad (6-32)$$

采用优化方法，可获得最小临界荷载 $q_{cr} = 3.00596EI/R^3$ 。

表 6-3 为搭接长度和支架最小临界荷载之间的关系。我们从中可以看出，当搭接长度不大时，对支架的最小临界荷载影响不显著，因此，靠加长搭接来提高支架的承载能力不是有效的方法。

表 6-3 搭接长度与最小临界荷载的关系

| a_1 | $EI = 1.8EI_0$ | $EI = 2.3EI_0$ | $EI = 2.8EI_0$ |
|-------|----------------|----------------|----------------|
| 0 | 3.0000 | 3.0000 | 3.0000 |
| 0.157 | 3.0062 | 3.0068 | 3.0072 |
| 0.314 | 3.0212 | 3.0259 | 3.0288 |
| 0.471 | 3.0609 | 3.0763 | 3.0863 |
| 0.628 | 3.1365 | 3.1734 | 3.1972 |
| 0.785 | 3.2604 | 3.3349 | 3.3839 |
| 0.942 | 3.4479 | 3.5864 | 3.6798 |
| 1.099 | 3.7204 | 3.9685 | 4.1431 |
| 1.256 | 1.1086 | 4.5518 | 4.8857 |
| 1.414 | 4.6552 | 5.4624 | 6.1418 |
| 1.570 | 5.4000 | 6.9000 | 8.4000 |

参 考 文 献

1. 煤炭部生产司. 巷道金属支架系列. 煤炭工业出版社, 1987. 6.
2. 侯朝炯. 巷道金属支架. 煤炭工业出版社, 1989. 2
3. 严志才. 巷道装配式支架及其应用. 煤炭工业出版社, 1982
4. 孙钧, 侯朝炯. 地下结构. 科学出版社, 1987. 2
5. Robert D. Cook, Concepts and Applications of Finite Element Analysis (Second Edition) John Wiley & Sons, 1981.
6. 樗木武 (日), 关树宝等译. 隧道力学. 中国铁道战略出版社, 1983. 3
7. 龙驭球, 包世华. 结构力学. 高等教育出版社, 1994. 5
8. 熊祝华. 结构塑性分析, 人民交通出版社, 1987. 9.
9. 龙驭球. 弹性地基梁的计算. 人民教育出版社, 1981. 9
10. You Chunan (尤春安), Plastic Limit Analysis of Discontinuous Lining Underground Pressure, Journal of Coal Science & Engineering (China), 1991. 1.
11. 尤春安. U 型钢可缩性支架的初始缩动条件. 山东矿业学院学报, 1994. 2
12. 尤春安. U 型钢可缩性支架的缩动分析. 煤炭学报, 1994. 3
13. 尤春安. U 型钢可缩性支架缩动后的强度计算, 岩土工程学报, 2000. 5
14. 尤春安. 巷道金属支架的静力计算. 矿山压力与顶板管理, 1993. 1
15. 冯豫, 尤春安. U 型钢可缩性支架的力学计算. 岩土力学矿山压力和岩层控制国际学术讨论会, 1991. 5
16. 尤春安. 巷道支架荷载量测. 山东煤炭科技, 1992. 2, 13~19
17. 尤春安. 软岩巷道监控量测. 软岩工程, 1994. 1
18. 朱光奎, 刘光道. 阶梯形变截面圆拱和圆环稳定性计算的有效方法. 力学与实践, 1997. 1
19. Bazant ZP, Cedolin L. Stability of Structures. Oxford University press. 1991. 108~118
20. J. T. Oden, E. A. Ripperger, Mechanics of Elastic Structures (Second edition). Hemisphere publishing Corporation McGraw Hill Book Company, 1981
21. 孙秉业, 刘信声. 结构塑性极限分析. 中国建筑工业出版社,

1985. 9

22. 余同希, 章亮炽. 塑性弯曲理论及其应用. 科学出版社, 1992. 5
23. 黄文彬等. 弹性梁间接触压力规律研究. 力学与实践. 1989. 1